E3A 2023 PSI - Exercice 2

Questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^{n+1}-1$ par $X-1$.

2. Donner, sans justification, la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ ainsi que son ensemble de définition.

*****

3. Étude d'une suite.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

b) On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\mathrm{d}t$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

4. Étude de la série de terme général $u_n - \ell$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
Pour tout entier naturel non nul p, et tout réel $t \in [0,1]$, on pose : $g_p(t) = (1-t)t^{p(n+1)}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$ et déterminer sa somme.

b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t$ et en donner un équivalent lorsque p tend vers $+\infty$.

c) En utilisant la série de fonctions définie au **a)**, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad u_n - \ell = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)}.$$

d) Pour tout p entier naturel non nul, on pose : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $h_p(t) = \dfrac{t^2}{((t+1)p+2)((t+1)p+1)}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{p\geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e) En déduire que, pour n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$u_n = \ell + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On admettra que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

E3A 2012 PSI - Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

① $a_1 \geq 1$,

② la suite (a_n) est bornée,

③ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,

④ la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ \forall n \geq 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(\mathrm{A}_n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\mathrm{A}_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans la démontrer la propriété suivante, notée (R) :

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
> **Si** $\begin{cases} (a) & u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ (b) & \text{la série } \sum(u_n) \text{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$.

5. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :

$$\mathrm{H}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

6. a) De façon analogue, montrer que

$$\mathrm{T}_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$ $(n \geq 2)$.

c) Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).

7. Étude de deux exemples.

a) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

b) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la propriété (R) et la série $\sum(w_n)_{n\geq 2}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.

8. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

a) Montrer que $\mathrm{A}_n \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{A}_{n-1}$.

b) Prouver que $\frac{a_n}{\mathrm{A}_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_{n-1}}\right)$

c) Déterminer alors la nature de la série $\sum(a_n/\mathrm{A}_n)_{n\geq 2}$.

d) À l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.

9. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum(v_n)$ diverge.

10. Soit (a_n) une suite vérifiant la propriété (P). Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

CCinP 2023 PSI - Problème 2
Puissances de matrices et limites de suites de matrices

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|.\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $\mathrm{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|\mathrm{V}\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

① la suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;

② la suite des normes $(\|\mathrm{M}_k - \mathrm{A}\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;

③ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(\mathrm{M}^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $\mathrm{M}(a,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\mathrm{M}(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & b & a \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $\mathrm{P}_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{M}(a,b)$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$\mathrm{M}(a,b) = b\mathrm{I}_n + a\mathrm{M}(1,0).$$

11. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable.

12. Montrer que $\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $\mathrm{M}(a,b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.

13. Montrer que $\mathrm{P}_{1,0}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - (n-1))(\mathrm{X}+1)^{n-1}$.

14. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $\mathrm{P}_{a,b}(\mathrm{X}) = a^n \mathrm{P}_{1,0}\left(\dfrac{\mathrm{X}-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $\mathrm{M}(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.

15. On définit le polynôme $\mathrm{Q}_{a,b} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{Q}_{a,b}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - (b-a))(\mathrm{X} - (b + (n-1)a))$.
Montrer que $\mathrm{Q}_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $\mathrm{M}(a,b)$ et en déduire que $\mathrm{M}(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).

16. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $\mathrm{Q}_{a,b}$ et en déduire une expression de $\mathrm{M}(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $\mathrm{M}(a,b)$ et de I_n.

17. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b + (n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(\mathrm{M}(a,b)^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k = 0$.

On suppose (sauf à la **Q29**) que $\mathrm{A} = \mathrm{T}$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

18. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1\,;\, i]\!]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_j) = 0$.

19. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j \in [\![1\,;\, i]\!]}$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

20. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.

21. Montrer alors que $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{T}^k = 0$.

22. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}^k = 0$.

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $\mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet que dans ce cas A est inversible.

On définit ensuite $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$,

- si $i \geq j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$;
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{F}$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-\mathrm{A}$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.

Soit $\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{Y}.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

23. Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $\mathrm{B} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{F}$. On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(\mathrm{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{X}_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_{k+1} = \mathrm{BX}_k + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}.$$

24. Montrer que $\mathrm{X} = \mathrm{BX} + \mathrm{M}^{-1}\mathrm{Y}$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $\mathrm{V} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.

Par convention, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{j=n+1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{0} u_j = 0$.

25. Montrer que $\mathrm{FV} = \lambda\mathrm{MV}$. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j\right).$$

26. Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{j\in[\![1\,;\, n]\!]} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right).$$

27. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{B}^k = 0$.

28. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_k - \mathrm{X} = \mathrm{B}^k(\mathrm{X}_0 - \mathrm{X})$$

et conclure.

FIN