Concours Centrale-Supélec 2019 [Maths 1-PC]

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée M^{T}.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Remarquer qu'on ne demande pas que id_{E} appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, AB = BA. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

2. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

3. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_{\mathrm{F}} = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) | u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}\}$.

4. Montrer que $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_{\mathrm{F}} = n^2 - pn + p^2$.
On pourra considérer une base de E *dans laquelle la matrice de tout élément de* $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ *est triangulaire par blocs.*

6. Déterminer $\max_{1\leq p\leq n-1}(n^2 - pn + p^2)$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le coefficient d'indice(i, j) de $\mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $\mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ où $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \ldots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

II.A - Calcul des puissances de J

10. Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geq 2$).

11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.

12. Quel est le lien entre la matrice $\mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leq k \leq n-1$?

II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. Montrer que $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2, \ldots, \mathrm{J}^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

14. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

15. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. Déterminer le polynôme caractéristique de J.

17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

19. Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

21. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.

22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie V.

Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

23. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leq n-1$.

24. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

25. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ 0 & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{A}(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $\mathrm{B}(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D}(u) \in \mathcal{M}_s(u)$.

26. Montrer que $\{\mathrm{A}(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\{\mathrm{D}(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

27. Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

28. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathrm{T}_n^{+}(\mathbb{C})$.

Concours Commun Mines-Ponts 2022 [Maths 1-PSI]

R et **C** désignent respectivement le corps des nombres réels et le corps des nombres complexes. **N** désigne l'ensemble des entiers naturels.

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **B**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **B** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert de **C**, de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n z^n$. Cette partie s'achève par l'étude de P au voisinage de 1.

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de **C** sera noté :

$$\mathrm{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

On admettra aussi les deux identités classiques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

A. Fonctions L et P

29. Soit $z \in \mathrm{D}$. Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$. On notera :

$$\mathrm{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

30. Soit $z \in \mathrm{D}$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto \mathrm{L}(tz)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.

31. Soit $z \in \mathrm{D}$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{\mathrm{L}(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que :

$$\exp(\mathrm{L}(z)) = \frac{1}{1-z}.$$

32. Montrer que $|\mathrm{L}(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.
En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{L}(z^n)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D :

$$\mathrm{P}(z) = \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{L}(z^n)\right].$$

33. Soit $z \in \mathrm{D}$. Vérifier que $\mathrm{P}(z) \neq 0$, que :

$$\mathrm{P}(z) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$:

$$\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

34. Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

35. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

36. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1.$$

37. Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u$, ainsi que l'égalité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$$

38. À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}.$$

39. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u \ [t \to 0^+] \longrightarrow -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose :

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \ : \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

$\boxed{\textit{On admet que } u_k \textit{ est continue sur } \mathbf{R}_+ \textit{ pour tout } k \in \mathbf{N}^*.}$

40. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer, pour tout entier $k \geqslant 1$, que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ puis que $u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|$, et établir enfin que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

41. En déduire que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

42. Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1 - e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

43. Conclure que :

$$\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1).$$