Concours Centrale-Supélec 2022 [Maths 1-PC]

I Exemples de sous-algèbres

I.A Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. En remarquant que $\mathrm{T}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}_{ij})_{i \leqslant j}$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{E}_{ij})_{i<j}$ on montre immédiatement que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit de deux matrices triangulaires étant encore triangulaire, $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. De plus, si la diagonale de l'une des deux matrices triangulaires est nulle, la diagonale de la matrice produit le sera aussi. Donc $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ aussi est stable par produit.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathrm{T}_n(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

2. L'ensemble $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il n'est pas stable par produit. En effet, les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais leur produit $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. L'ensemble $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre car $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique mais $\mathrm{C}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathrm{S}_2(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{A}_2(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

3. Reprenons les contre-exemples de la question précédente. Les matrices $\mathrm{A}' = \mathrm{Diag}(\mathrm{A}, \mathrm{O}_{k-2})$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{Diag}(\mathrm{B}, \mathrm{O}_{k-2})$ sont symétriques de taille k mais leur produit $\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \mathrm{Diag}(\mathrm{AB}, \mathrm{O}_{k-2})$ ne l'est pas. La matrice $\mathrm{C}' = \mathrm{Diag}(\mathrm{C}, \mathrm{O}_{k-2})$ est antisymétrique de taille k mais $\mathrm{C}'^2 = \mathrm{Diag}(\mathrm{C}^2, \mathrm{O}_{n-2})$ ne l'est pas.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \mathrm{S}_k(\mathbb{K}) \text{ et } \mathrm{A}_k(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_k(\mathbb{K}).}$$

I.B Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

4. L'ensemble $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ n'est pas vide car l'endomorphisme nul 0_E stabilise F. Soit $u, v \in \mathcal{A}_\mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in \mathrm{F}$, $(u + \lambda v)(x) = u(x) + \lambda v(x) \in \mathrm{F}$. Donc $u + \lambda v$ stabilise F et $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ est stable par combinaison linéaire ce qui fait de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Soient $u, v \in \mathcal{A}_\mathrm{F}$. Alors $(u \circ v)(\mathrm{F}) = u(v(\mathrm{F})) \subset u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ donc $u \circ v$ stabilise F et $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ est stable par composition.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A}_\mathrm{F} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(\mathrm{E}).}$$

5. Soit G un supplémentaire de F dans E. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ la matrice d'un endomorphisme stabilisant F est de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$.
Réciproquement une telle matrice est la matrice d'un endomorphisme stabilisant F.

Donc $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ est isomorphe à $\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0_{n-p,p} & \mathrm{C}\end{pmatrix} : \mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})\right\}$ qui est de dimension $p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = (n-p+p)^2 - p(n-p)$.

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_{\mathrm{F}} = n^2 - np + p^2.}$$

6. Pour tout $p \in \{1, \dots, p-1\}$, $n^2 - np + p^2 = (p - \frac{n}{2})^2 + \frac{3n^2}{4}$ donc la dimension de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ est maximale quand $\left|p - \frac{n}{2}\right|$ est maximale *i.e* quand $p = 1$ ou $p = n-1$ auxquels cas elle vaut $n^2 - n + 1$.

$$\boxed{\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - np + p^2) = n^2 - n + 1.}$$

I.C exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. Posons $\mathrm{K} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{I}_2, \mathrm{K})$ ce qui montre que $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus, $\mathrm{I}_2^2 = \mathrm{I}_2$, $\mathrm{I}_2\mathrm{K} = \mathrm{K}\mathrm{I}_2 = \mathrm{K}$ et $\mathrm{K}^2 = -\mathrm{I}_2$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit puisque qu'un produit de vecteurs d'une famille génératrice reste dans $\Gamma(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{K}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

8. Si $\Gamma(\mathbb{R})$ était diagonalisable tous ses éléments serait diagonalisable. En en particulier, $\mathrm{K} \in \Gamma(\mathbb{R})$ serait diagonalisable. Son polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{K}} = \mathrm{X}^2 + 1$ serait alors scindé sur $\mathbb{R}$ ce qui n'est manifestement pas le cas.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{R}) \text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

9. Le polynôme $\chi_{\mathrm{K}} = \mathrm{X}^2 + 1 = (\mathrm{X} - i)(\mathrm{X} + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_{K} annule K. Donc K est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ *i.e* est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{K} = \mathrm{P}\,\mathrm{Diag}(i, -i)\mathrm{P}^{-1}$. Soit $\mathrm{M} \in \Gamma(\mathbb{C})$ et $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{M} = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{K}$. Alors $\mathrm{M} = \mathrm{P}(a\mathrm{I}_2 + b\,\mathrm{Diag}(i, -i))\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{Diag}(a + ib, a - ib)\mathrm{P}^{-1}$. Vrai pour tout $\mathrm{M} \in \Gamma(\mathbb{C})$ donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

Remarque : On aurait aussi pu montrer que tous les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ étaient diagonalisables -via leur polynôme caractéristique par exemple- puis que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une algèbre commutative ce qui prouverait que les éléments de $\Gamma(\mathbb{C})$ sont co-diagonalisables. L'esprit du sujet voulait cependant que nous passions par la diagonalisabilité de K.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A Calcul des puissances de J

10. Sans difficulté. La matrice J envoie e_i sur e_{i+1} et la matrice J^2 e_i sur e_{i+2} où les indices sont pris modulo n.

$$\boxed{\mathrm{J}=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&1\\1&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{J}^2=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1&0\\0&0&\ddots&0&1\\1&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&0\\0&\cdots&1&0&0\end{pmatrix}.}$$

11. La matrice J^k est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme qui envoie e_i sur e_{i+k} toujours en prenant les indices modulo n. En particulier, J^n est la matrice identité.

$\boxed{\mathrm{J}^n=\mathrm{I}_n.\ \mathrm{J}^k \text{ n'a que des 0 sauf sur la } k\text{-ième sous-diagonale et la } n-k\text{-ième sur-diagonale où il y a}}$

12. Sans difficulté.

$$\boxed{\mathrm{J}(a_0,\dots,a_{n-1})=\sum_0^{n-1}a_k\mathrm{J}^k.}$$

II.B Une base de $\mathcal{A}$

13. D'après la question précédente, $\mathcal{A}=\overrightarrow{(}\mathrm{J}^0,\dots,\mathrm{J}^{n-1})$ donc la famille $(\mathrm{I}_n,\dots,\mathrm{J}^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$ (et $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel !). Montrons qu'elle est libre. Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$ tels que $\sum_0^{n-1}a_k\mathrm{J}^k=0$ *i.e* $\mathrm{J}(a_0,\dots,a_{n-1})=0$. Étant donné la définition de $\mathrm{J}(a_0,\dots,a_{n-1})$ on a $a_0=\cdots=a_{n-1}=0$. Donc la famille $(\mathrm{J}^0,\dots,\mathrm{J}^{n-1})$ est libre et c'est une base de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{(\mathrm{J}^0,\dots,\mathrm{J}^{n-1})\text{ est une base de }\mathcal{A}.}$$

Remarque : En fait, $\mathcal{A}=\mathbb{R}[\mathrm{J}]$ *où* $\mathbb{R}[\mathrm{J}]=\{\mathrm{P}(\mathrm{J}):\mathrm{P}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]\}$ *est l'ensemble des polynômes en* J. *L'application* $\varphi:\mathbb{R}[\mathrm{X}]\underset{\to\mathrm{M}}{\longrightarrow}{}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\varphi(\mathrm{P})=\mathrm{P}(\mathrm{J})$ *est un morphisme d'algèbre. De plus* $\mathcal{I}m\,(()\,\varphi)=\mathbb{R}[\mathrm{J}]$ *ce qui montre directement que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre.*

14. Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors en particulier M commute avec J. Réciproquement, si M commute avec J alors M commute avec $\mathrm{J}^0,\dots,\mathrm{J}^{n-1}$. Définissons le centre de M comme l'ensemble $\mathcal{C}(\mathrm{M}):=\{\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}):\ \mathrm{AM}=\mathrm{MA}\}$. En remarquant qu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $\mathrm{A}\mapsto\mathrm{AM}-\mathrm{MA}$ on prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ contient $\overrightarrow{(}\mathrm{J}^0,\dots,\mathrm{J}^{n-1})=\mathcal{A}$ donc M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.

$\boxed{\text{Une matrice M commute avec J si et seulement si elle commute avec tous les éléments de }\mathcal{A}.}$

15. On sait déjà que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{M} = \mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $\mathrm{N} = \mathrm{J}(b_0, \ldots, b_{n-1})$. Posons $\mathrm{P} = \sum_0^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$ et $\mathrm{Q} = \sum_0^{n-1} b_k \mathrm{X}^k$ de sorte que $\mathrm{M} = \mathrm{P}(\mathrm{J})$ et $\mathrm{N} = \mathrm{Q}(\mathrm{J})$. Soit $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ le reste de la division euclidienne de PQ par $\mathrm{X}^n - 1$. Il existe $\mathrm{T} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{PQ} = \mathrm{T}(\mathrm{X}^n - 1) + \mathrm{R}$. Alors $\mathrm{PQ}(\mathrm{J}) = \mathrm{R}(\mathrm{J})$ car $\mathrm{J}^n - \mathrm{I}_n = 0$. Alors $\mathrm{MN} = \mathrm{PQ}(\mathrm{J}) = \mathrm{R}(\mathrm{J}) = \mathrm{J}(c_0, \ldots, c_{n-1})$ où l'on a noté $\mathrm{R} = \sum_0^{n-1} c_k \mathrm{X}^k$. Donc $\mathrm{MN} \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par produit et c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{MN} = \mathrm{PQ}(\mathrm{J}) = \mathrm{QP}(\mathrm{J}) = \mathrm{NM}$ donc les éléments de $\mathcal{A}$ commutent entre eux.

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{A} \text{ est une sous-algèbre commutative de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Remarque : Puisque φ est un morphisme d'algèbre et que $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est une algèbre commutative, l'algèbre $\mathbb{R}[\mathrm{J}]$ est aussi commutative. En règle général deux polynômes en une même matrice/endomorphisme commutent toujours (pour peu que l'anneau de base soit commutatif).

II.C Diagonalisation de J

16. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_J annule J autrement dit π_J divise χ_J où π_J désigne le polynôme minimal de J. C'est le polynôme unitaire de plus petit degrès qui annule J. On a donc que $\deg \pi_\mathrm{J} \leqslant n$. Si π_J est de degré n alors $\pi_\mathrm{J} = \chi_\mathrm{J}$. Le polynôme $\mathrm{X}^n - 1$ annule J, est de degré n et est unitaire. Par ailleurs puisque la famille $(\mathrm{J}^0, \ldots, \mathrm{J}^{n-1})$ est libre, aucun polynôme de degré inférieur à $n-1$ ne peut annuler J. Donc $\deg \pi_\mathrm{J} \geqslant n$ et $\deg \pi_\mathrm{J} = n$. Donc $\pi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^n - 1$. D'après ce qui vient d'être dit : $\chi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^n - 1$.

Nous pouvons également traiter cette question sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ni la notion de polynôme minimal. Par définition, $\chi_\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix}$. Développons par rapport à la première colonne : $\chi_\mathrm{J} = \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \mathrm{X} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & \mathrm{X} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{n-1} = \mathrm{X}^n + (-1)^n.(-1).(-1)^{n-2}$. La dernière égalité est obtenue en développant le deuxième déterminant par rapport à la première ligne.

$$\boxed{\chi_\mathrm{J} = \mathrm{X}^n - 1.}$$

17. Dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{X}^n - 1 = \prod_0^{n-1} (\mathrm{X} - \omega^k)$ où $\omega := \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$. Donc J est annulé par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{J est diagonalisable dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).}$$

18. Pour $n = 2$, le polynôme caractéristique de J est $\mathrm{X}^2 - 1$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $n \geqslant 3$ le polynôme minimal de J est $\mathrm{X}^n - 1$ qui n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc aucun polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ n'annule J et J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{J n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sauf si } n = 2.}$$

19. Le spectre de J est l'ensemble des racines de son polynôme caractéristique. Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}) = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$ où $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$. Il y a n valeurs propres donc elles sont toutes de multiplicité (géométrique) 1 : $\dim \mathrm{E}_{\omega^k}(\mathrm{J}) = 1$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Posons $\mathrm{X}_k := \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{JX}_k = \begin{pmatrix} \omega^{-k(n-1)} \\ 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-2)} \end{pmatrix} = \omega^k \mathrm{X}_k$. Donc X_k est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k et (X_k) est une base de $\mathrm{E}_{\omega^k}(\mathrm{J})$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{J}) = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\} \text{ et } \mathrm{E}_{\omega^k}(\mathrm{J}) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \vdots \\ \omega^{-k(n-1)} \end{pmatrix}.}$$

II.D Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire **complexe**. Par exemple, $i\mathrm{J} \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $i\mathrm{J} \notin \mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Non, } \mathcal{A} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

21. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{PJP}^{-1} = \mathrm{Diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}(\mathrm{J})$. Alors $\mathrm{PAP}^{-1} = \mathrm{PQ}(\mathrm{J})\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{Q}(\mathrm{PJP}^{-1}) = \mathrm{Q}(\mathrm{Diag}(1, \ldots, \omega^{n-1})) = \mathrm{Diag}(\mathrm{Q}(1), \ldots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1}))$ et la matrice PAP^{-1} est diagonale.

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \ \mathrm{PAP}^{-1} \text{ est diagonale.}}$$

L'égalité $\mathrm{PQ}(\mathrm{J})\mathrm{P}^{-1}$ vient du fait que $\mathrm{PJ}^k\mathrm{P}^{-1} = (\mathrm{PJP}^{-1})^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

22. D'après la question précédente, la matrice $\mathrm{J}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \mathrm{Q}(\mathrm{J})$ est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(\mathrm{Q}(1), \ldots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1}))$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Q}(\mathrm{J})) = \{\mathrm{Q}(1), \ldots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1})\}.}$$

III. Réduction d'une algèbre nilpotente

23. Si $n = 1$, les matrices nilpotentes sont les matrices nulles qui sont trigonalisables dans toute base.

$$\boxed{\text{Le résultat est vrai pour } n = 1.}$$

24. S'il n'existe aucun tel sous-espace vectoriel alors $\mathcal{A}$ est irréductible. Or E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$ d'après le théorème de Burnside. En particulier, $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \in \mathcal{A}$ mais id_{E} n'est pas nilpotent ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\text{Il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et } \{0\} \text{ stable par les éléments de } \mathcal{A}.}$$

25. Soit W un supplémentaire de V dans V et $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathrm{V}\oplus\mathrm{W} = \mathrm{E}$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ où A est de taille $r \times r$, B de taille $r \times s$ et D de taille $s \times s$.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ telle que } \operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix} \text{ où } \mathrm{A} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C}) \text{ et } \mathrm{D} \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

26. Un calcul matriciel par blocs montre que $\begin{pmatrix} \mathrm{A}(u+\lambda v) & \mathrm{B}(u+\lambda v) \\ 0 & \mathrm{D}(u+\lambda v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ 0 & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mathrm{A}(v) & \mathrm{B}(v) \\ 0 & \mathrm{D}(v) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathrm{A}(uv) & \mathrm{B}(uv) \\ 0 & \mathrm{D}(uv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u)\mathrm{A}(v) & * \\ 0 & \mathrm{D}(u)\mathrm{D}(v) \end{pmatrix}$. Ceci montre que $\{\mathrm{A}(u) : u \in \mathcal{A}\}$ est une partie non vide (car $\mathcal{A}$ est non vide) stable par combinaison linéaire et stable par produit. C'est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. De même pour $\{\mathrm{D}(u) : u \in \mathcal{A}\}$.

$$\boxed{\text{Les ensembles } \{\mathrm{A}(u) :\ u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{\mathrm{D}(u) :\ u \in \mathcal{A}\} \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ et } \mathcal{M}_s(\mathbb{C}).}$$

Soit $u \in \mathcal{A}$. Il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $u^{\mathrm{N}} = 0_n$. Un calcul matriciel par blocs montre que $u^{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u)^{\mathrm{N}} & * \\ 0 & \mathrm{D}(u)^{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{A}(u)^{\mathrm{N}} = 0_r$ et $\mathrm{D}(u)^{\mathrm{N}} = 0_s$.

$$\boxed{\text{Les éléments de } \{\mathrm{A}(u) :\ u \in \mathcal{A}\} \text{ et } \{\mathrm{D}(u) :\ u \in \mathcal{A}\} \text{ sont nilpotents.}}$$

27. Le sous-espace vectoriel V étant distinct de $\{0\}$ et de E, sa dimension r vérifie $1 \leqslant r \leqslant n-1$. De même pour s la dimension de W. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{A}$, les matrices $\mathrm{PA}(u)\mathrm{P}^{-1}$ et $\mathrm{QD}(u)\mathrm{Q}^{-1}$ sont triangulaires supérieures.

Posons $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q} \end{pmatrix}$. Alors T est inversible d'inverse $\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{T}\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{PA}(u)\mathrm{P}^{-1} & * \\ 0 & \mathrm{QD}(u)\mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$. Donc $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

$$\boxed{\text{L'algèbre } \mathcal{A} \text{ est trigonalisable.}}$$

28. La matrice T est inversible. Elle envoie donc la base $\mathcal{B}$ sur une autre base $\mathcal{B}'$ de E. Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de u est $\mathrm{T}\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}\mathrm{T}^{-1} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe une base de E dans laquelle les éléments de } \mathcal{A} \text{ sont triangulaires supérieures.}}$$

Concours Commun Mines-Ponts 2022 [Maths 1-PSI]

A. Fonctions L et P

29. Multiplier par n le terme général d'une série entière ne change pas le rayon de convergence. On en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est de même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} z^n$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$ (en tant que série géométrique de raison z). Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} z^n$ est de rayon de convergence 1, et donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ également ; en particulier, elle converge pour tout $z \in \mathrm{D}$. On sait que si $z \in]-1,1[$, on a de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z). \qquad (*)$$

30. On note que Φ est la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(tz)^n}{n}$ (selon la variable t, à $z \in \mathrm{D}$ fixé). Or d'après la question précédente, elle converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|tz| < 1$, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que : $|t| < \frac{1}{|z|}$, où l'on pose $\frac{1}{|z|} = +\infty$ si $z = 0$. On en déduit que cette série entière est de rayon de convergence au moins $\frac{1}{|z|}$, et sa somme Φ est de classe C^∞ et dérivable terme à terme sur $\left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$. Comme $[-1,1] \subseteq \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$ (en effet, $|z| < 1$ implique : $1 < \frac{1}{|z|}$), on en déduit en particulier que Φ est dérivable sur $[-1,1]$. On a de plus :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \Phi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^{n-1}z^n}{n} = z\sum_{n=1}^{+\infty}(tz)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}. \qquad (\dagger)$$

31. L'application Ψ est dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables. Il y a tout de même une petite subtilité, du fait que dans le programme de PSI, la dérivabilité au sens complexe ne soit pas définie ; ainsi on ne peut pas directement dire que $t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est dérivable sur $[0,1]$ en tant que composée de $t \mapsto \mathrm{L}(tz)$ qui est à valeurs dans $\mathbb{C}$ et de l'exponentielle qui serait dérivable sur $\mathbb{C}$. J'explique à la fin de la résolution de cette question comment contourner cette difficulté (bêtement technique). Admettons provisoirement que $t \mapsto e^{\Phi(t)}$ soit dérivable, et de dérivée $t \mapsto \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$. On a alors :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi'(t) = -ze^{\Phi(t)} + (1-tz)\Phi'(t)e^{\Phi(t)} \overset{(\dagger)}{=} \left(-z + (1-tz) \times \frac{z}{1-tz}\right)e^{\Phi(t)} = 0.$$

Ainsi Ψ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc Ψ est une application constante. On détermine la valeur de cette constante grâce à une évaluation en $t = 0$:

$$\Psi(0) = (1 - 0 \times z)e^{\mathrm{L}(0\times z)} = e^{\mathrm{L}(0)} \overset{(*)}{=} e^0 = 1.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [0,1], \quad \Psi(t) = 1.$$

En particulier, pour $t = 1$, on a $\Psi(1) = 1$, c'est-à-dire, en remplaçant $\Psi(1)$ par son expression explicite :

$$(1-z)\exp(\mathrm{L}(z)) = 1,$$

et donc :

$$\exp(\mathrm{L}(z)) = \frac{1}{1-z},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Détaillons à présent comment justifier, en restant dans les clous du programme, que l'application $f : t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est bien dérivable sur $[0,1]$, de dérivée $t \mapsto \Phi'(t)e^{\Phi(t)}$. Nous y parviendrons en étudiant la limite quand $h \to 0$ du taux d'accroissement de la fonction f entre t et $t+h$ (ou, cela reviendrait au même, en montrant que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 ; la différence n'est que rédactionnelle). Soit $t \in [0,1]$. On a, pour tout $h \in \mathbb{R}$ non nul :

$$f(t+h) = \exp(\Phi(t+h)) = \exp\left(\Phi(t) + h\Phi'(t) + o(h)\right) = \exp(\Phi(t)) \times \exp\left(h\Phi'(t) + o(h)\right).$$

Pour abréger, posons $z(h) = h\Phi'(t) + o(h)$, de sorte qu'avec ces notations, pour tout h au voisinage de 0 on a : $f(t+h) = f(t)\exp(z(h))$. On remarque qu'on a $z(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et $\frac{z(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \Phi'(t)$: c'est tout ce qu'il nous suffit de retenir pour la suite. On a, pour tout h au voisinage de 0 :

$$\exp\left(z(h)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z(h))^n}{n!} = 1 + z(h) + z(h)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(z(h))^{n-1}}{n!}.$$

Notons $\mathrm{S}(z) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. C'est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini (ce n'est que la série exponentielle, à peu de choses près), donc elle est continue sur $\mathbb{C}$ et en particulier en 0 (c'est là la clé de ce raisonnement : même si l'on n'a pas défini la dérivabilité au sens complexe en PSI, nous savons qu'une somme de série entière est continue sur son disque ouvert de convergence). Or pour tout h non nul au voisinage de 0 :

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t)\frac{\exp(z(h))-1}{h} = f(t)\frac{z(h)+z(h)\mathrm{S}(z(h))}{h} = f(t)\frac{z(h)}{h}\left(1+\mathrm{S}(z(h))\right).$$

Comme $z(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, on a : $\mathrm{S}(z(h)) \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{S}(0) = 0$, par continuité de S en 0. On sait aussi que $\frac{z(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \Phi'(t)$. Par conséquent, l'égalité ci-dessus implique :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f(t)\Phi'(t)\,(1+0) = \Phi'(t)f(t),$$

ce qui démontre que $f : t \mapsto e^{\Phi(t)}$ est dérivable, et qu'on a :

$$f'(t) = \Phi'(t)f(t) = \Phi'(t)e^{\Phi(t)},$$

d'où le résultat admis ci-dessus.

32. Soit $z \in \mathrm{D}$. on a $|z| \in [0,1[$, et donc d'après la question **29.** :

$$|\mathrm{L}(z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n} \overset{(*)}{=} -\ln(1-|z|),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Or, si $z \in \mathrm{D}$, alors $z^n \in \mathrm{D}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant |\mathrm{L}(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z^n|) = -\ln(1-|z|^n). \tag{‡}$$

Montrons que la série $\sum_{n \geqslant 1} -\ln(1-|z|^n)$ converge. On a : $|z|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, car $|z| < 1$, et donc :

$$-\ln(1-|z|^n) \underset{n \to +\infty}{\sim} |z|^n > 0.$$

Or la série géométrique $\sum_{n \geqslant 1} |z|^n$ est de raison $|z| < 1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} -\ln(1-|z|^n)$ converge également.

Toujours par comparaison, grâce à la majoration (‡), on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{L}(z^n)$ converge absolument, donc converge, et ce pour tout $z \in \mathrm{D}$: d'où le résultat.

33. L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, donc : $\mathrm{P}(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{L}(z^n)\right] \neq 0$. De plus, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ on a, d'après la question **31.** :

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{L}(z^n)\right] = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \exp(\mathrm{L}(z^n)) = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-z^n}.$$

Quand $\mathrm{N} \to +\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathrm{P}(z)$, par définition de P et continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$. Par conséquent :

$$\mathrm{P}(z) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-z^n}.$$

Toujours d'après l'égalité ci-dessus, pour tout $t > 0$ on a $e^{-t} \in]0,1[$, et donc :

$$\forall t > 0,\ \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \exp\left[\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{L}\left(e^{-nt}\right)\right] = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-e^{-nt}}.$$

Chaque terme du produit ci-dessus est strictement positif, du fait que $e^{-nt} < 1$. On peut donc en considérer le logarithme :

$$\ln\left(\exp\left[\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{L}\left(e^{-nt}\right)\right]\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1-e^{-nt}\right).$$

On a : $\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \exp\left[\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{L}\left(e^{-nt}\right)\right] = \mathrm{P}\left(e^{-t}\right) > 0$. Par continuité du logarithme, le membre de gauche tend donc vers $\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right)$ quand $\mathrm{N} \to +\infty$. On en déduit que le membre de droite de l'égalité ci-dessus a une limite finie quand $\mathrm{N} \to +\infty$, et :

$$\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} -\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \ln\left(1-e^{-nt}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-nt}\right),$$

d'où le résultat.

B. Développement asymptotique en variable réelle

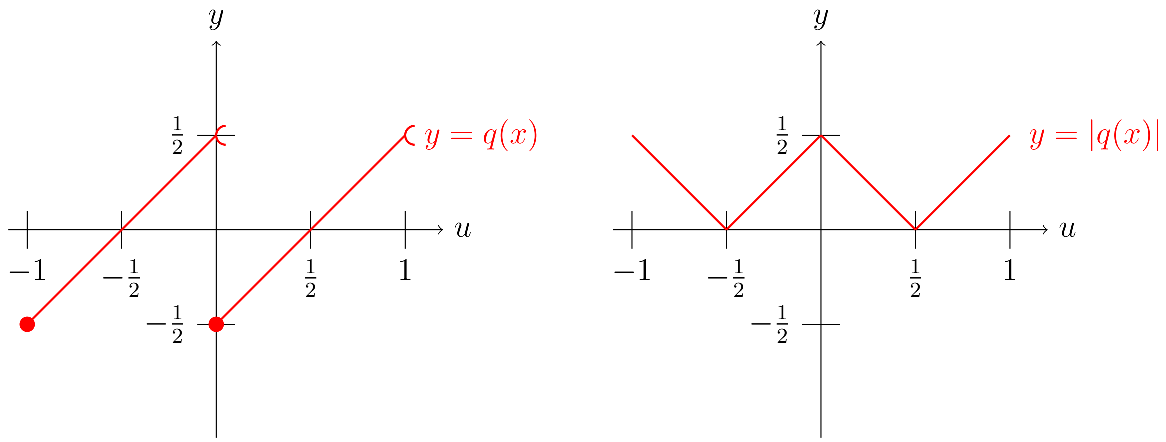
34. La fonction q est somme de fonctions continues par morceaux, donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction partie entière vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor - \frac{1}{2} = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} = q(x),$$

donc q est 1-périodique. Il reste à montrer que la fonction $|q|$ est paire. Comme q est 1-périodique, il suffit de démontrer que $|q(x)| = |q(-x)|$ pour tout $x \in [0,1[$. Pour $x = 0$, il est évident que l'égalité est vraie, et on ne considère donc que $x \in]0,1[$.
Or, pour un tel x, on a plus simplement : $q(x) = x - \frac{1}{2}$, et : $q(-x) = -x - (-1) - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}$ (car : $-1 < -x < 0$). Afin de simplifier $|q(x)|$ et $|q(-x)|$, on traite deux cas :

- si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \leqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \geqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = -q(x) = -x + \frac{1}{2} = q(-x) = |q(-x)|$;
- si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, alors $q(x) = x - \frac{1}{2} \geqslant 0$ et $q(-x) = -x + \frac{1}{2} \leqslant 0$, donc dans ce cas : $|q(x)| = q(x) = x - \frac{1}{2} = -q(-x) = |q(-x)|$.

Dans tous les cas, on a $|q(x)| = |q(-x)|$, pour tout $x \in]0,1[$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la réduction expliquée ci-dessus. Ainsi $|q|$ est bien une fonction paire, ce qu'il fallait démontrer.



35. Soit $t > 0$. L'application $u \mapsto \left|\dfrac{q(u)}{e^{tu}-1}\right|$ est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (la continuité de $|q|$ serait en principe à justifier, bien qu'on la voie sur le graphe ci-dessus, en étudiant la limite en 0 par valeurs supérieures et inférieures ; la périodicité assure alors la continuité en tous les autres points éventuellement problématiques). Étudions l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.
On montre facilement qu'on a $|q(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ par 1-périodicité. Par conséquent, pour tout $u \geqslant 1$ on a :

$$0 \leqslant \left| u^2 \frac{q(u)}{e^{tu}-1} \right| \leqslant \frac{1}{2} \frac{u^2}{e^{tu}-1} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0,$$

puisque : $\frac{u^2}{e^{tu}-1} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^2 e^{-tu} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ (théorème des croissances comparées). On en déduit :

$$\left| \frac{q(u)}{e^{tu}-1} \right| = o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ est d'exposant $2>1$, donc elle converge. Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ converge absolument, donc converge : d'où le résultat, pour tout $t>0$.

36. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a, par la relation de Chasles, et après le changement de variable affine $t=u-k$:

$$\int_1^n\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\frac{q(t+k)}{t+k}\mathrm{d}t.$$

Comme q est 1-périodique, on a $q(t+k)=q(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$, donc :

$$\int_1^n\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\frac{q(t)}{t+k}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\frac{t-\frac{1}{2}}{t+k}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1\left(1-\frac{k+\frac{1}{2}}{t+k}\right)\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1\right.$$

Or : $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+k}=[\ln(t+k)]_0^1=\ln(k+1)-\ln(k)$. Il apparaît presque un télescopage : attention à ne pas oublier le terme $k+\frac{1}{2}$ en facteur. Utilisons cette observation à profit, et faisons apparaître un « vrai » télescopage :

$$\begin{aligned}\int_1^n\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u&=(n-1)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(\ln(k+1)-\ln(k))\\&=(n-1)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k)\\&=(n-1)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)\\&=(n-1)+\ln((n-1)!)-\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k+1)-\left((k-1)+\frac{1}{2}\right)\ln(k)\right].\end{aligned}$$

Cette dernière somme étant télescopique, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_1^n\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u&=(n-1)+\ln((n-1)!)-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n)\\&=(n-1)+\ln((n-1)!\times n)-\ln(n)-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n)\\&=(n-1)+\ln(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La seconde égalité de l'énoncé s'obtient en écrivant : $n=\ln(e^n)$, et : $\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)=\ln\left(n^{n+\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(n^n\sqrt{n}\right)$.

37. Soit x au voisinage de $+\infty$. On a :

$$0\leqslant\left|\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{|q(u)|}{u}\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{2}\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right).$$

Or on a : $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$, donc : $1-\frac{1}{x}<\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x}=1$. Et donc, par continuité du logarithme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\right)=\ln(1)=0$. L'encadrement ci-dessus donne donc, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{\lfloor x\rfloor}^x\frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u=0.$$

Voyons comment en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge. D'abord, notons que la question précédente permet de démontrer que la suite $\displaystyle\left(\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u\right)_{n\geqslant 2}$ converge, puisque par la formule de Stirling :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} = \sqrt{2\pi},$$

et donc, par continuité du logarithme :

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

Alors, pour tout réel x au voisinage de $+\infty$, on se ramène au cas d'un paramètre entier avec la relation de Chasles :

$$\int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_{\lfloor x\rfloor}^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Comme $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini quand $x \to +\infty$, ce qui précède montre que, par composition de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{\lfloor x\rfloor} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1$. La seconde intégrale a une limite nulle quand $x \to +\infty$ d'après la résolution en début de question. Alors, en tant que somme de quantités ayant une limite finie, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + 0.$$

Ceci démontre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge, et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

38. Pour tout $u > 0$ on a $e^{-u} \in]0,1[$, et donc, comme on l'a rappelé à la question **29.** :

$$-\ln\left(1 - e^{-u}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Nous allons en déduire l'égalité de l'énoncé *via* une intégration terme à terme, que nous allons justifier en vérifiant les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall u \in]0,+\infty[,\quad f_n(u) = \frac{e^{-nu}}{n}.$$

Alors :

— pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (c'est une fonction intégrable de référence) ;

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $u \mapsto -\ln\left(1 - e^{-u}\right)$ d'après l'égalité rappelée ci-dessus ;

— justifions que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge ; on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad \int_0^{+\infty}|f_n|=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-nu}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nu}}{-n}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{n^2},$$

et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}|f_n|=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2>1$: on en déduit qu'elle est convergente.

Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $u\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(u)=-\ln(1-e^{-u})$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (et donc son opposée aussi), et d'autre part que cette somme peut s'intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(u)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(u)\mathrm{d}u.$$

En reprenant les calculs ci-dessus, le membre de droite est égal à $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (et donc à $\dfrac{\pi^2}{6}$ d'après le résultat rappelé en début d'énoncé), tandis que le membre de gauche donne $\displaystyle\int_0^{+\infty}-\ln(1-e^{-u})\mathrm{d}u$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty}-\ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{6},$$

d'où le résultat demandé après multiplication par -1.

39. Suivant l'indication de l'énoncé, nous allons d'abord démontrer que l'application $g:x\mapsto\frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad g'(x)=\frac{e^{-x}x-(1-e^{-x})}{x^2}=\frac{(1+x)e^{-x}-1}{x^2}.$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre 1 en 0, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x=1+x+x^2\int_0^1\underbrace{(1-t)e^{tx}}_{\geqslant 0}\mathrm{d}t\geqslant 1+x,\qquad (**)$$

et donc : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $1\geqslant(1+x)e^{-x}$, ce dont on déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)\leqslant 0$. Ainsi g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln\circ g$ également (on a bien $g>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, étant donné que $e^{-x}<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, donc la composition avec le logarithme est bien définie). On en déduit :

$$\forall t\in]0,1],\ \forall u\in]0,1],\quad \ln(g(t))\leqslant\ln\left(g(tu)\right)\leqslant\lim_0\ln\circ g.$$

La limite du membre de droite existe bien (et est finie), puisque pour tout x au voisinage de 0 :

$$g(x)\frac{x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1,$$

donc : $\lim_0 \ln \circ g = \ln(1) = 0$. Ceci démontre en passant que la fonction $\ln \circ g$ se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, et donc qu'elle est intégrable sur $]0,1]$. Intégrons l'inégalité ci-dessus sur $]0,1]$, pour obtenir :

$$\forall t \in]0,1], \quad \int_0^1 \ln(g(t))\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 0\mathrm{d}u,$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in]0,1], \quad \ln(g(t)) \leqslant \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u \leqslant 0.$$

Comme on l'a vu ci-dessus, on a : $\lim_{t\to 0} \ln(g(t)) = 0$. Par conséquent, par le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre qu'on a : $\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(g(tu)\right)\mathrm{d}u = 0$. On a donc démontré :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u = 0.$$

Or :

$$\forall t > 0, \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{tu}\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u,$$

donc : $\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = \int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$, et il est très classique de démontrer, grâce à une intégration par parties, que : $\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u = [u\ln(u) - u]_0^1 = -1$. En conclusion :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u = -1.$$

40. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note que u_k est une intégrale à paramètre. Montrons donc sa continuité sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+, \quad v_k(u,t) = \begin{cases} \dfrac{tq(u)}{e^{tu}-1} & \text{si } t > 0, \\[2ex] \dfrac{q(u)}{u} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Alors :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $u \mapsto v_k(u,t)$ est continue par morceaux sur $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ (en fait, comme on le voit d'après l'étude de la question **34.**, la fonction q est continue sur $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ quitte à éventuellement enlever une extrémité de l'intervalle ; l'extrémité à enlever dépendant de la parité de k ; il suffit alors de reconnaître en $u \mapsto v_k(u,t)$ un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) ;
- pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, la continuité de l'application $t \mapsto v_k(u,t)$ est évidente sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, et on vérifie qu'elle est continue en 0 également par un calcul de limite :

$$\frac{tq(u)}{e^{tu}-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{tq(u)}{tu} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{q(u)}{u} = v_k(u,0)\,;$$

donc $t \mapsto v_k(u,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $(u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+$, on a :

$$|v_k(u,t)| \leqslant \frac{|q(u)|}{u}\,; \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

en effet, pour $t=0$ c'est évident, et pour $t>0$ on utilise $(**)$ (question précédente) pour obtenir :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{e^{tu}-1}{tu} \geqslant 1,$$

et donc :

$$\forall (u,t) \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right] \times \mathbb{R}_+^*, \quad |v_k(u,t)| = \frac{|q(u)|}{u} \times \frac{tu}{e^{tu}-1} \leqslant \frac{|q(u)|}{u}.$$

L'application $\varphi : u \mapsto \dfrac{|q(u)|}{u}$ est continue par morceaux sur le SEGMENT $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$ si $k>0$, donc elle y est intégrable. L'hypothèse de domination est donc bien vérifiée.
On en déduit, par le théorème de continuité sous le signe intégrale, l'application $u_k : t \mapsto \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} v_k(u,t)\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}_+$: d'où le résultat.

41. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $\frac{t}{e^{tu}-1} > 0$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$, le signe de l'intégrande de $u_k(t)$ ne dépend que du signe de q. Or l'expression de la fonction q montre que :

$$\forall x \in [0,1[\,, \quad \begin{cases} q(x) \leqslant 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ q(x) \geqslant 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[. \end{cases}$$

Par 1-périodicité de q, on a donc :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = \begin{cases} -|q(x)| \leqslant 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ |q(x)| \geqslant 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

J'exclus les bornes pour éviter les distinctions de cas fastidieuses, et inutiles (car l'intégrale ignore les valeurs en les points isolés : il ne coûte donc rien d'étudier son signe en excluant les extrémités de l'intervalle d'intégration).
On en déduit d'une part :

$$\forall x \in \left]\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right[, \quad q(x) = (-1)^{k+1}|q(x)|,$$

et d'autre part que, par croissance de l'intégrale : $u_k(t) \leqslant 0$ si k est pair, et $u_k(t) \geqslant 0$ si k est impair (on a en effet établi plus haut que le signe de l'intégrande est dicté par le signe de q). On a donc aussi, pour tenir compte de cette distinction de cas selon la parité de k :

$$u_k(t) = (-1)^{k+1}|u_k(t)|.$$

(On note une erreur d'énoncé concernant l'exposant de -1). La première égalité demandée est alors immédiate :

$$|u_k(t)| = (-1)^{k+1}u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t(-1)^{k+1}q(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.$$

Tout ce qui précède démontre que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k(t)$ est alternée : montrons qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées :

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| - |u_{k+1}(t)| &= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{(k+1)/2}^{(k+2)/2} \frac{t[q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(k+1-v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (v = k+1-u) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(u)|}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t|q(v)|}{e^{t(k+1-v)}-1}\mathrm{d}v \qquad (|q| \text{ 1-pér. et paire}) \\
&= \int_{k/2}^{(k+1)/2} \underbrace{t|q(u)|}_{\geqslant 0} \underbrace{\left(\frac{1}{e^{tu}-1} - \frac{1}{e^{t(k+1-u)}-1}\right)}_{\geqslant 0} \mathrm{d}u \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

le signe du terme en facteur de $t|q(u)|$ découlant du fait que l'application $u \mapsto \frac{1}{e^{tu}-1}$ soit clairement décroissante (on a $u \leqslant k+1-u$ pour tout $u \in \left[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2}\right]$) ; ceci montre que la suite $(|u_k(t)|)_{k\geqslant 1}$ est décroissante ;

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant |u_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\mathrm{d}u}{e^{tu}-1} \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{2}\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{\ln(1)}{2} = 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty} |u_k(t)| = 0$.

Ainsi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ est alternée, et la valeur absolue de son terme général décroît en convergeant vers 0. Par le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k(t)$ converge (ce qu'en fait, on pouvait déjà déduire de la question **35.**), et son reste est majoré en valeur absolue par son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant |u_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Or, en prenant le logarithme dans $(**)$, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2n},$$

d'où le résultat.

42. De la question précédente, il résulte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad \left\|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui démontre que le reste de la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, et donc la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2} u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

En tant que limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ (question **40.**), la somme $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La continuité sur $\mathbb{R}_+$ implique en particulier que, quand $t \to 0^+$, on a :

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0).$$

Or, par la relation de Chasles :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} u_k(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u,$$

et, par le même argument :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k(0) = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Le calcul de limite ci-dessus se réécrit donc ainsi :

$$\lim_{t\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\mathrm{d}u \overset{[q.\mathbf{37}.]}{=} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1,$$

d'où le résultat.

43. Soit $t > 0$. En reprenant les arguments de la question **35.**, il est clair que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$, $\int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ convergent. Écrivons :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{t\lfloor u\rfloor}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{tk}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $u \mapsto \frac{t}{e^{tu}-1} = \frac{te^{-tu}}{1-e^{-tu}}$ est $u \mapsto \ln\left(1-e^{-tu}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u &= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_k^{k+1} \left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_k^{k+1} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right) - \ln\left(1-e^{-tk}\right)\right] + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).
\end{aligned}$$

Simplifions les deux premiers termes du membre de droite. Commençons par $\sum_{k=1}^{+\infty} k\left[\ln\left(1-e^{-t(k+1)}\right) -\right.$ pour obtenir $\ln(\mathrm{P}(e^{-t}))$, il faudrait faire apparaître la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tk}\right)$. Nous y parvenons ainsi ; posons pour abréger :

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a_k = \ln\left(1-e^{-tk}\right),$$

de sorte que la somme à simplifier ci-dessus s'écrive : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(a_{k+1}-a_k)$. On a alors, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k a_{k+1} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k a_k = \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1}(k-1)a_k - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} k a_k &= -\sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1} a_k + \mathrm{N}a_{\mathrm{N}+1} - a_1 \\ &= -\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} a_k + \mathrm{N}a_{\mathrm{N}+1}.\end{aligned}$$

Les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(a_{k+1}-a_k)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ convergent : pour la première, cela découle du calcul d'intégrale plus haut, et pour la seconde on note que c'est la série dont la somme apparaît dans la question **33.**. Par conséquent, il est sensé de prendre la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$ dans cette égalité, et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k + \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{N}a_{\mathrm{N}+1}.$$

(Nous avons implicitement effectué une transformation d'Abel.)

D'après la question **33.**, on a : $\displaystyle -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \ln\left(\mathrm{P}(e^{-t})\right)$, et de plus, pour N au voisinage de $+\infty$:

$$\mathrm{N}a_{\mathrm{N}+1} = \mathrm{N}\ln\left(1-e^{-t(\mathrm{N}+1)}\right) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \mathrm{N}e^{-t(\mathrm{N}+1)} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

par le théorème des croissances comparées. On a donc montré :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(a_{k+1}-a_k\right) = \ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right),$$

et donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

Enfin, pour exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ (l'intégrale qui figure dans l'identité de l'énoncé), nous allons effectuer une intégration par parties :

— en dérivant $u \mapsto u$, qui est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$ et de dérivée $u \mapsto 1$;

— en intégrant $u \mapsto \dfrac{t}{e^{tu}-1}$, qui est continue sur $[1,+\infty[$ et dont une primitive est, on l'a vu, $u \mapsto \ln(1-e^{-tu})$.

Puisque l'intégrale est généralisée, nous devons préalablement vérifier l'existence du terme $[u\ln(1-e^{-tu})]_1^{+\infty}$. On a :

$$\lim_{u\to+\infty} u\ln\left(1-e^{-tu}\right) = 0,$$

par un calcul analogue à celui effectué plus haut avec $\mathrm{N}a_{\mathrm{N}+1}$. Il n'y a donc pas de problème d'existence. La formule de l'intégration par parties nous donne donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tu}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left[u\ln\left(1-e^{-tu}\right)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = -\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$$

On peut enfin conclure :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \left(-\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u\right) - \ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right).$$

C'est-à-dire, après simplifications, le résultat voulu :

$$\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

44. Soit $t>0$ au voisinage de 0. D'après la question précédente :

$$\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) = -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) - \int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u.$$

Étudions le comportement asymptotique de chaque terme quand $t\to 0^+$. Tout d'abord, on a :

$$\ln\left(1-e^{-t}\right) = \ln\left(t+(t)\right) = \ln\left(t\left(1+(1)\right)\right) = \ln(t) + \ln\left(1+(1)\right).$$

Il découle deux choses de ce développement asymptotique. D'abord, du fait que le second terme tende vers $\ln(1)=0$ quand $t\to 0^+$, on a :

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-t}\right) = -\frac{\ln(t)}{2} + (1).$$

D'autre part, on en déduit que : $-\ln\left(1-e^{-tu}\right) \underset{u\to 0}{\sim} -\ln(u) > 0$, et donc que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature (notons qu'on intègre bien une fonction continue sur $]0,1]$). Comme la seconde converge (c'est une intégrale de référence), on en déduit que la première converge aussi. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln\left(\frac{1-e^{-tu}}{t}\right)\mathrm{d}u - \ln(t).
\end{aligned}$$

La seconde intégrale a pour limite -1 quand $t\to 0^+$ d'après la question **39.**. Ensuite, on effectue le changement de variable $v=tu$ dans la première intégrale. Il est licite, car l'application $u\mapsto tu$ est de classe C^1 et strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. On a $\mathrm{d}v = t\mathrm{d}u$, et donc :

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-v}\right)\mathrm{d}v \overset{(q.\,\mathbf{38.})}{=} -\frac{\pi^2}{6t}.$$

Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1-e^{-tu}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t) + (1).$$

Si l'on compile tout ce qu'on a démontré jusqu'à présent dans cette question, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) &= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u - \frac{\ln(t)}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{6t} + 1 - \ln(t)\right) + (1) \\
&= -\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u + \frac{\ln(t)}{2} + \frac{\pi^2}{6t} - 1 + (1).
\end{aligned}$$

Or, d'après la question **42.**, on a : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1 + (1)$. On a donc, en conclusion :

$$\ln\left(\mathrm{P}\left(e^{-t}\right)\right) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1).$$