L'objectif de ce problème est d'établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$$

par six méthodes différentes qui permettent de parcourir une grande partie des programmes d'analyse de première et de seconde année.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ s'appelle *série harmonique alternée.*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Par une SOMME[1] de Riemann...

a) Justifier, pour $n \geqslant 1$, que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et en déduire

$$\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$

b) Montrer, pour $n \geqslant 1$, que $\mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$.

c) En déduire la convergence de la série harmonique alternée ainsi que sa somme.

2. En passant par un développement asymptotique de $\mathbf{H_n}$

a) Établir la convergence de la suite $\big(\mathrm{H}_n - \ln(n)\big)$ et en déduire l'existence d'une constante γ telle que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

b) À l'aide de $\mathrm{S}_{2n-1} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$ (établi dans la question précédente), en déduire la convergence de la série harmonique alternée ainsi que sa somme.

3. En passant par une formule de Taylor avec reste intégral

a) Montrer que les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

b) Soit

$$\begin{array}{rccc} g: & [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array}$$

Calculer, pour tout k de $\mathbb{N}$, $g^{(k)}$ et vérifier que $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

c) Établir par récurrence que, pour $n \geqslant 1$,

$$\forall x \in [0\,;\,1], \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

d) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

e) Justifier alors que

$$\mathrm{S}_{2n-1} \leqslant \ln(2) \leqslant \mathrm{S}_{2n}.$$

f) Conclure.

4. À l'aide d'une écriture intégrale du terme général

a) Que vaut, pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (-t)^n \mathrm{d}t$?

1. Je n'ai pas écrit une SÉRIE de Riemann.

b) En déduire, pour $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{S}_n = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c) Conclure.

5. À l'aide d'une seconde écriture intégrale du terme général

a) Rappeler, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nx)\mathrm{d}x$.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-nx}$.
Montrer que la série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement et préciser sa somme.

c) Peut-on appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

d) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{F}_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Expliciter F_n et montrer que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

e) Conclure.

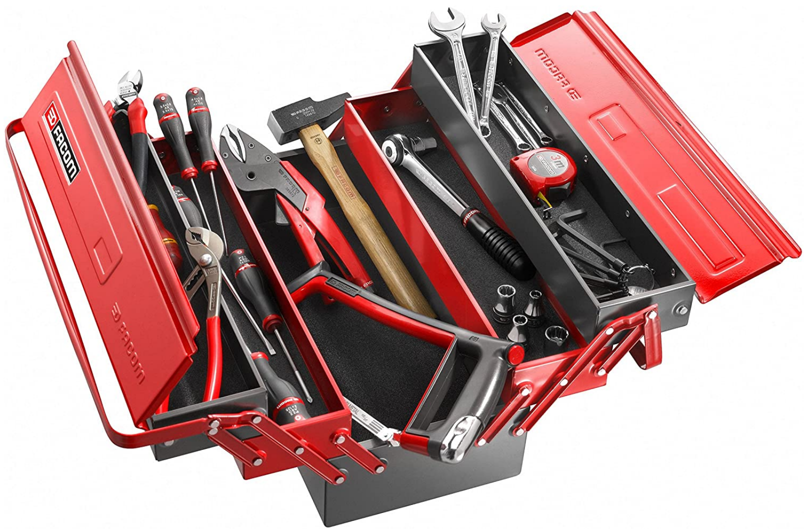
6. Du côté des séries entières

a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $x \in \,]-1\,;\ 0]$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge uniformément sur $[-1\,;\ 0]$.

c) Conclure.

CAISSE À OUTILS



Des outils dont vous pourriez avoir besoin [2] :

- Raisonnement par récurrence
- Théorème de convergence dominée de Lebesgue
- Intégration par parties
- Suites adjacentes
- Sommes de Riemann
- Théorème de la double limite
- Somme de termes d'une suite géométrique
- Inégalité triangulaire pour les intégrales
- Théorème des séries alternées de Leibniz
- Somme d'une série géométrique
- Convergence d'une suite et série télescopique des différences

2. Dans un ordre délibérément aléatoire.