EXERCICE 1 - Autour de l'intégrale de Gauß

1. **a)** Pour $x \neq 0$, $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, limite encore valable lorsque $x=0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$ en composant par l'exponentielle continue en x...

b) L'étude de $u \mapsto u - \ln(1+u)$ montre que cette fonction atteint un minimum valant 0 en 0.

2. $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
$\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{e}^{-x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et comme $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[\,1\,;\ +\infty[$ d'après la propriété de Riemann ($\alpha = 2 > 1$). Par négligeabilité, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $[\,1\,;\ +\infty[$, et par continuité elle l'est sur $[\,0\,;\ +\infty[$. Et par parité, elle l'est sur $\mathbb{R}$. Donc G existe.

3. **a)** Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } -\sqrt{n} < x < \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

① Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux (elle est même continue).

② $f_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-x^2)$.

③ φ est continue.

④ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \,]-\sqrt{n}\,;\ \sqrt{n}[$.
$n\ln\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right) \leqslant n \times \dfrac{-x^2}{n} \leqslant -x^2$ donc $0 \leqslant \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \varphi(x)$.
On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ avec φ continue et intégrable.
Le théorème de convergence dominée s'applique et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \mathrm{G}.$$

b) $u : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ est classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]-\sqrt{n}\,;\ \sqrt{n}[$ donc est une bijection de $]-\sqrt{n}\,;\ \sqrt{n}[$ sur $]-\pi/2\,;\ \pi/2[$ et $x = \sqrt{n}\sin(u)$ donc $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u$.
$\displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\sin^2(u)\right)^n\sqrt{n}\cos(u)\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = 2\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1}$ par parité.

c) $2\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{4n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}$ donc $\mathrm{G} = \sqrt{\pi}$.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(-x^2)$ et Φ sa primitive qui s'annule en 0.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$. Comme φ est paire, $\displaystyle\int_0^{-x}\varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_{-x}^0 \varphi(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ donc Φ est impaire.

b) $\Phi' = \varphi > 0$ donc Φ est strictement croissante.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \int_0^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{G}$ par parité de φ, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Et comme Φ est impaire, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\Phi(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. **a)** On reconnaît la série exponentielle de paramètre $-x^2$, donc $\mathrm{S_N} \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} \varphi$.

b) Soit $x \in \,]\,0\,;\ 1]$. La suite $\left(\dfrac{x^{2n}}{n!}\right)$ est décroissante car elle est à termes strictement positifs et pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\Big/\dfrac{x^{2n}}{n!} = \dfrac{x^2}{n+1} \leqslant 1$. Elle est de plus de limite nulle car $|x^{2n}| \leqslant 1$ et $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par conséquent le théorème des séries alternées s'applique et $|\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \dfrac{x^{2(\mathrm{N}+1)}}{(\mathrm{N}+1)!}$

Cette majoration est encore valable pour $x=0$ puisque $\mathrm{R_N}(0)=0$.

c) On déduit alors de : $\forall x \in [\,0\,;\ 1]\,,\qquad |\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \dfrac{x^{2(\mathrm{N}+1)}}{(\mathrm{N}+1)!} \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{N}+1)!}$

que $\mathrm{R_N}$ est bornée sur $[\,0\,;\ 1]$, et que $||\mathrm{R_N}||_\infty \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{N}+1)!}$.

Comme $\mathrm{R_N}=\varphi-\mathrm{S_N}$, cela prouve que $\mathrm{S_N}-\varphi$ est bornée et que $||\mathrm{S_N}-\varphi||_\infty \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{N}+1)!}$.

Par encadrement, $\lim\limits_{\mathrm{N}\to+\infty} ||\mathrm{S_N}-\varphi||_\infty = 0$, donc la convergence de la suite $(\mathrm{S_N})$ est uniforme.

d) Puisque la convergence de $(\mathrm{S_N})$ vers φ est uniforme sur le segment $[\,0\,;\ 1]$, le théorème d'interversion permet d'écrire

$\Phi(1)=\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{S_N}(x)\mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\int_0^1 \mathrm{S_N}(x)\mathrm{d}x.$

Or $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{S_N}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-x^2)^n}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \int_0^1 \frac{(-x^2)^n}{n!}\mathrm{d}x$ par linéarité (il n'y a qu'un nombre fini de termes).

$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{S_N}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, d'où

$\displaystyle\Phi(1)=\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$

6. a) $\displaystyle\mathrm{S_4}(1)=\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ est une valeur approchée de $\Phi(1)$ avec une erreur égale à $|\mathrm{R_4}(1)|$, or

$|\mathrm{R_4}(1)| \leqslant \dfrac{1}{5!(2\times 5+1)} \leqslant \dfrac{1}{120*11} \leqslant \dfrac{1}{100\times 10} \leqslant 10^{-3}.$

b) L'erreur étant inférieure à $u_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)}$, on calcule les termes tant que $u_n = \dfrac{1}{n!(2n+1)} >$ `erreur`.

```
def Phi_1(erreur):
    n = 0 # indice initial
    S = 1 # S_0
    f = 1 # 1/n!
    s = 1 # (-1)**n
    while f/(2*n+1) > erreur:
        n +=1
        f = f/n
        s = -s
        S += s*f/(2*n+1)
    return S
```

Exercice 2 - Autour du calcul de puissances de matrices

1. $\mathrm{A}^2=5\mathrm{A}-4\mathrm{I}_3$.

2. A est diagonalisable car symétrique réelle.

1 est clairement valeur propre de A car $\mathrm{rg}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)=1$, avec $\dim(\mathrm{E}_1)=2$. Il reste une valeur propre simple λ à déterminer, et comme A est diagonalisable, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=1\times 2+\lambda$ donc $\lambda=4$.

Les amatrices et amateurs de polynôme caractéristique auront trouvé $\chi_\mathrm{A}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$.

On peut aussi exploiter la relation précédente qui fournit un polynôme annulateur : $X^2-5X+4 = (X-1)(X-4)$ *est annulateur de* A*, donc* $Sp(A) \subset \{1,4\}$*. Comme* $rg(A-I_3) = 1 < 3$ *et* $rg(A-4I_3) = 2 < 3$*,* 1 *et* 4 *sont effectivement les valeurs propres de* A.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ conviennent.

3. Pour tout n de N, $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + 4^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ d'où l'existence de A_1 et A_4.

On peut calculer ces matrices à l'aide P et P^{-1} ou observer que

$$\begin{cases} A_1 + A_4 & = I_3 \\ A_1 + 4A_4 & = A \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3A_1 & = 4I_3 - A \\ 3A_4 & = A - I_3 \end{cases}$$

$A_1 = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $\Delta^2 = D$.

Alors $\left(P\Delta P^{-1}\right)^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$ donc $B = P\Delta P^{-1}$ convient.

Explicitement $P^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Ce n'est pas la seule solution.

On peut aussi tenter de prendre $n = 1/2$ *dans la réponse précédente, mais dans ce cas il faudra vérifier que la matrice obtenue convient, car la relation précédente n'a été établie que pour* n *entier naturel. On obtient la même matrice* B *que ci-dessus.*

5. **a)** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = yA + (x-2y)I_3$, donc $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(A, I_3)$ ce qui montre que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel dont une base est (A, I_3), car (A, I_3) est libre.

b) Soit $(M, M') \in \mathcal{F}$. Alors il existe $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aA + bI_3$ et $M' = a'A + b'I_3$.
Comme $A^2 = 5A - 4I_3$,
$MM' = aa'A^2 + (ab' + a'b)A + bb'I_3 = (5aa' + ab' + a'b)A + (bb' - 4aa')I_3 \in \mathcal{F}$
donc $\mathcal{F}$ est stable pour le produit matriciel.

c) Soit $M = aA + bI_3$ une matrice quelconque de $\mathcal{F}$. On reprend les matrices P et D qui permettent de diagonaliser A. Alors :
$P^{-1}MP = aP^{-1}AP + bP^{-1}I_3P = aD + bI_3$ est diagonale.
Ainsi : $\forall M \in \mathcal{F}, \qquad P^{-1}MP$ est diagonale.

On peut aussi observer que si $AU = \lambda U$, *alors* $MU = a\lambda U + bU = (a\lambda + b)U$ *: tout vecteur propre de* A *est un vecteur propre de* M. *Donc toutes les matrices* M *de* $\mathcal{F}$ *sont diagonalisables avec une même matrice de passage vers une base de vecteurs propres de* A.

6. **a)** Soit pour tout n de $\mathbb{N}$ $\mathcal{H}_n$ l'assertion « $\exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$.

- Comme $A^0 = I_3 = 0.A + 1.I_3$, $\mathcal{H}_0$ est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Je suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n A + \beta_n I_3)A = \alpha_n A^2 + \beta_n A = (5\alpha_n + \beta_n)A - 4\alpha_n I_3$ donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) α et β satisfont les relation $\begin{cases} \alpha_0 &= 0 \\ \beta_0 &= 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{n+1} &= 5\alpha_n + \beta_n \\ \beta_{n+1} &= -4\alpha_n \end{cases}$.

Donc (α_n) est la suite vérifiant

$$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 4\alpha_n.$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 = 5x - 4 = 0$ de solutions 1 et 4. Donc il existe a et b réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = a + 4^n b.$$

Les termes initiaux fournissent $a + b = 0$ et $a + 4b = 1$ donc $a = -1/3$ et $b = 1/3$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \frac{1}{3}\big(4^n - 1\big) \text{ et } \beta_n = -4\alpha_{n-1} = \frac{1}{3}\big(4 - 4^n\big).$$

7. **a)** Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.

b) J et I_3 commutent donc

$A^n = (J + I_3)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k\right) J - \frac{1}{3}J = I_3 + \frac{1}{3}\big(4^n - 1\big)J$

8. **a)** $P(X) = X^2 - 5X + 4$ est un polynôme non nul P de $\mathbb{R}_2[X]$ annulateur de A.

b) Par la propriété de division euclidienne, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 1 (car $\deg(P) = 2$) tel que

$$X^n = P(X)Q(X) + R(X) \qquad \boxed{\heartsuit}.$$

En écrivant $R = aX + b$ et en prenant la relation $\boxed{\heartsuit}$ aux racines de P :

$$\begin{cases} X = 1 : & a + b = 1 \\ X = 4 : & 4a + b = 4^n \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = & \frac{1}{3}\big(4^n - 1\big) \\ b = & \frac{1}{3}\big(4 - 4^n\big) \end{cases}$$

Donc le reste cherché vaut $\frac{1}{3}\big(4^n - 1\big)X + \frac{1}{3}\big(4 - 4^n\big)$

c) $\boxed{\heartsuit}$ pour $X = A$ donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{3}\big(4^n - 1\big)A + \frac{1}{3}\big(4 - 4^n\big)I_3$$

9. *Application –*

a) $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$ car $\forall n \in n, X_{n+1} = AX_n$.

b) En exploitant l'un des calculs précédents de A^n, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n = & 4^n - 1 \\ v_n = & 4^n \\ w_n = & 4^n + 1 \end{cases}$$