Ce devoir reprend deux exercices que j'ai donnés en devoir surveillé en 2021 et parcourt l'essentiel des notions que nous avons vues durant ce premier semestre. Il doit être assez détaillé pour vous permettre d'avancer.

Exercice 1 - Autour de l'intégrale de Gauβ

On **admet** l'équivalent suivant des intégrales de Wallis (démontré lors d'un précédent devoir)

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

1. **a)** Pour x dans $\mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. *Attention, la réponse dépend de x...*

b) Montrer que, pour tout u de $]-1\,;\ +\infty[$, $\ln(1+u) \leqslant u$.

2. Justifier l'existence de l'intégrale de Gauss $\mathrm{G} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

3. **a)** Montrer que $\mathrm{G} = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

On pourra introduire les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n & \textit{si } |x| < \sqrt{n} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, en posant $u = \mathrm{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$, montrer que

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = 2\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1}.$$

c) En déduire la valeur de G.

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp\left(-x^2\right)$ et Φ sa primitive qui s'annule en 0.

a) Indiquer, pour tout x de $\mathbb{R}$, une expression intégrale de $\Phi(x)$. Que dire de la parité de Φ ?

b) Établir le tableau de variation de Φ sur $]-\infty\,;\ +\infty[$ en indiquant ses limites.

5. Pour tout N de $\mathbb{N}$, on définit la fonction $\mathrm{S_N}$ par

$$\mathrm{S_N} : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-x^2)^n}{n!}.$$

a) Quelle est la limite simple de la suite de fonctions $(\mathrm{S_N})$?

b) À l'aide du théorème des séries alternées, proposer, pour x dans $[0\,;\ 1]$ et N dans $\mathbb{N}$, une majoration de $\mathrm{R_N}(x) = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(\mathrm{S_N})$ est uniforme.

d) Montrer finalement que

$$\Phi(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

6. **a)** Justifier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ est une valeur approchée de $\Phi(1)$ avec une erreur inférieur à 10^{-3}.

b) Écrire une fonction `Phi_1(erreur)` en python d'argument un réel `erreur` strictement positif et renvoyant une valeur approchée de $\Phi(1)$ avec une erreur inférieure à `erreur`.

Exercice 2 - Autour du calcul de puissances de matrices

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

2. Justifier que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$.

3. Montrer qu'il existe deux matrices A_1 et A_4 dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on explicitera telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{A}^n = \mathrm{A}_1 + 4^n \mathrm{A}_4.$$

4. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

5. On considère l'ensemble

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel dont une base est $(\mathrm{A}, \mathrm{I}_3)$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est stable pour le produit matriciel.

c) Montrer que toutes les matrices de $\mathcal{F}$ sont co-diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{F}, \qquad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \text{ est diagonale.}$$

On notera qu'il s'agit de la même matrice de passage pour toutes les matrices de $\mathcal{F}$.

Dans les trois questions suivantes, on se retrouve une expression de A^n par trois méthodes différentes et indépendantes.

6. a) Montrer par récurrence l'existence de deux suites réelles α et β telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{A}^n = \alpha_n \mathrm{A} + \beta_n \mathrm{I}_3.$$

b) Expliciter, pour tout n de $\mathbb{N}$, α_n et β_n.

7. a) Soit $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour n dans $\mathbb{N}^*$, J^n.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n en fonction de n, I_3 et J.

8. a) Proposer un polynôme non nul P de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ annulateur de A.

b) Déterminer, pour n dans $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme P.

c) En déduire, pour tout n de N, une expression de A^n en fonction de n, A et I_3.

9. *Application* – On considère les trois suites réelles u, v et w définies par

$$u_0 = 0, v_0 = 1, w_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = & 2u_n + v_n + w_n, \\ v_{n+1} = & u_n + 2v_n + w_n, \\ w_{n+1} = & u_n + v_n + 2w_n. \end{cases}$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_n à l'aide de A, n et X_0.

b) En déduire une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction n.