1. Par une SOMME[1] de Riemann...

a) $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\overset{k-n\to k}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)}$ et on reconnaît une somme de Riemann de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t}$ continue sur $[\,0\,;\ 1]$.

Par la propriété des sommes de Riemann : $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.

b) En séparant les termes de rangs pairs et impairs,

$\mathrm{S}_{2n-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{H}_n=\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n.$

Variante – On peut démontrer cette égalité par récurrence sur n.

c) On a déjà $\mathrm{S}_{2n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(2)$.

Puis $\mathrm{S}_{2n}=\mathrm{S}_{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$.

Donc les suites extraites des termes de rangs impairs et pairs respectivement (S_{2n-1}) et (S_{2n}) convergent vers une même limite donc la suite (S_n) converge, vers $\ln(2)$.

Autrement dit, la série harmonique alternée converge et sa somme est $\ln(2)$.

Variante – On peut justifier la convergence de (S_n) par le théorème des séries alternées puis déduire sa limite de la limite de la suite extraite (S_{2n-1}).

Attention ! La convergence de la suite (S_{2n-1}) à elle seule ne prouve pas la convergence de la suite (S_n). Par exemple, la suite $\big((-1)^{2n-1}\big)$ converge vers -1 alors que la suite $\big((-1)^n\big)$ diverge.

2. En passant par un développement asymptotique de $\mathbf{H_n}$

a) En posant pour $n\geqslant 1$ $u_n=\mathrm{H}_n-\ln(n)$, on a

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=-\dfrac{1}{n(n+1)}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

donc la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge, autrement dit la suite u converge.

Soit γ sa limite. Alors $\mathrm{H}_n-\ln(n)\underset{n\to+\infty}{=}\gamma+o\,(1)$ donc $\mathrm{H}_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln(n)+\gamma+o\,(1)$.

Variante – On peut démontrer que u est décroissante et minorée.

Attention ! $o\,(1)-o\,(1)=o\,(1)$.

b) $\mathrm{S}_{2n-1}=\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n=\ln(2n)+\gamma-\ln(n)-\gamma+o\,(1)=\ln(2)+o\,(1)$, donc $\mathrm{S}_{2n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$ et on conclut comme dans la question précédente.

3. En passant par une formule de Taylor avec reste intégral

a) $\forall n\geqslant 1, \mathrm{S}_{2n+1}-\mathrm{S}_{2n-1}=-\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n+1}\geqslant 0,$

$\forall n\geqslant 0, \mathrm{S}_{2n+2}-\mathrm{S}_{2n}=\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+2}\leqslant 0,$

$\mathrm{S}_{2n-1}-\mathrm{S}_{2n}=-\dfrac{1}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

donc les suites (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes.

b) Notons que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car ln l'est sur $[\,1\,;\ 2]$.

On montre par récurrence sur k que :

1. Je n'ai pas écrit une SÉRIE de Riemann.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

On a alors bien $g^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

c) • Le second membre pour $n = 1$ vaut

$x + \displaystyle\int_0^x \frac{-(x-t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} x + \left[\frac{x-t}{1+t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = x - x + \ln(1+x) = g(x).$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

• Supposons-là vraie à un rang $n \geqslant 1$ fixé. Alors

$\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$

$\displaystyle = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}(-1)^n + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$ ce qui prouve la formule au rang $n+1$.

... et je viens de démontrer la formule de Taylor avec reste intégrale...

Variante – On a le droit d'invoquer la formule de Taylor avec reste intégrale.

d) Toujours pour $x \in [0\,;\,1]$,

• En prenant $2n$ dans la formule précédente :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) = -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}g^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t$ or $g^{(2n+1)}$ est positive d'après l'expression trouvée en b), donc cette intégrale est positive, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) \leqslant 0$.

• De façon analogue en prenant $2n-1$ dans la formule précédente :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) = -\int_0^x \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!}g^{(2n)}(t)\mathrm{d}t$ or $g^{(2n)}$ est négative d'après l'expression trouvée en b), donc cette intégrale est négative, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k - \ln(1+x) \geqslant 0$.

• Donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \leqslant \ln(1+x) \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.

e) En prenant $x = 1$ dans l'encadrement précédent et après un décalage d'indice,

$$\mathrm{S}_{2n-1} \leqslant \ln(2) \leqslant \mathrm{S}_{2n}.$$

f) (S_{2n-1}) et (S_{2n}) sont adjacentes donc convergentes de même limite ℓ.

Par prolongement des inégalités larges, en passant à la limite dans l'encadrement précédent, $\ell \leqslant \ln(2) \leqslant \ell$ donc $\ell = \ln(2)$.

On en conclut, comme dans les deux questions précédentes, que la série harmonique alternée converge et sa somme est $\ln(2)$.

4. À l'aide d'une écriture intégrale du terme général

a) Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (-t)^n\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

b) $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t)^k\mathrm{d}t$ et par linéarité de l'intégrale (il s'agit d'une somme finie),

$\mathrm{S}_n = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t)^k\mathrm{d}t$ et par somme de termes géométriques de raison $-t$ différente de 1

$\mathrm{S}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{-(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$, donc

$\mathrm{S}_n = \ln(2) + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$

c) $\left|(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{n+1}}{1+t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2(n+2)}$

donc par encadrement $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

La relation précédente fournit alors $\mathrm{S}_n = \ln(2) + o(1)$, donc (S_n) converge et sa limite est $\ln(2)$.

Variante – $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ s'établit facilement avec le théorème de convergence dominée.

5. À l'aide d'une seconde écriture intégrale du terme général

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$.

b) Soit $x \in]\,0\,;\ +\infty[$. $f_n(x) = \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)^n$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-x} \in]\,0\,;\ 1[$, donc convergente.

La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement, vers la fonction

$$\mathrm{S} :]\,0\,;\ +\infty[\ \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{\boxed{n=\mathbf{1}}}^{+\infty} \big(-\mathrm{e}^{-x}\big)^n = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

Attention ! Cette série commence avec l'indice $n = 1$.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} |f_n|$ diverge et on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme à la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Pour tout x de $]\,0\,;\ +\infty[$,

$\mathrm{F}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-\mathrm{e}^{-x})^k = -\mathrm{e}^{-x}\frac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Sur $]\,0\,;\ +\infty[$, on a

① pour tout n F_n est continue ;

② $\sum \mathrm{F}_n$ converge simplement vers $\mathrm{F} : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$;

③ F est continue ;

④ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\,0\,;\ +\infty[$, $\big|\mathrm{F}_n(x)\big| \leqslant \left|-\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1-(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leqslant 2\mathrm{e}^{-x}$.

Par conséquent, le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (F_n) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{F}_n(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x.$$

e) Par linéarité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n} = -\mathrm{S}_{n-1}$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x = \big[\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\big]_0^{+\infty} = -\ln(2).$

Ainsi la suite (S_n) converge, et sa limite est $\ln(2)$.

6. Du côté des séries entières

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in \left]-1\,;\ 0\right]$.

b) En posant $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n(-x)^n}{n}$ pour $x \in [-1\,;\ 0]$, la suite $\left(\dfrac{(-x)^n}{n}\right)$ est décroissante et par le théorème des séries alternées, en notant $\mathrm{R}_n(x)$ le reste d'ordre n de cette série, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1\,;\ 0]\,, \left|\mathrm{R}_n(x)\right| \leqslant \dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$,
donc la fonction R_n est bornée sur $[-1\,;\ 0]$, et $||\mathrm{R}_n||_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Donc par encadrement $||\mathrm{R}_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément vers $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $[-1\,;\ 0]$.
Attention ! Le cours n'affirme pas qu'une série entière converge uniformément sur $\left]-\mathrm{R}\,;\ \mathrm{R}\right[$ où R est son rayon de convergence. Contre-exemple : $\sum x^n$, $\mathrm{R}_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$ donc R_n n'est même pas une fonction bornée sur $\left]-1\,;\ 1\right[$.

c) Par convergence uniforme et continuité des fonctions g_n, g est continue sur $[-1\,;\ 0]$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ existe et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = -g(-1) = -\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\lim_{x\to-1^+} -\ln(1-x) = \ln(2)$.
Variante – On peut invoquer le théorème de la double limite en -1.