

Exercice 1 Matrices de projections orthogonales

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

- Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $F = \text{Vect}(1, X^2)$ et $G = \text{Vect}(1, X)$.
Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G .

Solution (Ex.1 – Matrices de projections orthogonales)

- Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}X; \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1) \right)$.
- $1 \in F$, $X^2 \in F$ et $X \in F^\perp$ vue la famille orthonormale précédente, donc $\mathcal{M}(p_F) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}X \right)$ est manifestement une base orthonormale de G . On peut s'en servir pour déterminer $p_G(X^2)$. Par ailleurs, on a encore $1 \in G$ et $X \in G$.

$$\text{Donc } \mathcal{M}(p_G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on désigne par x le triplet (x_1, x_2, x_3) .

- Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3}$.
Prouver que N est une norme euclidienne sur E .
- Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire associé à N .

Solution (Ex.2 – Retrouver un produit scalaire à partir d'une norme)

- Produit scalaire associé :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(N(x+y)^2 - N(x-y)^2) =$$

$$x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

$$\langle x, x \rangle = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2.$$

- (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1; 0; 0)$, $u_2 = (-2; 1; 0)$ et $u_3 = (-5; 2; 1)$ est une orthonormale de E obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 3 Matrices de projection et symétrie orthogonales

Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 (muni du produit scalaire canonique) de :

- la projection orthogonale p sur le plan Q d'équation $x + y + z = 0$.
- la symétrie orthogonale s admettant le plan Q pour axe.

Solution (Ex.3 – Matrices de projection et symétrie orthogonales)

- Il est plus rapide de passer par Q^\perp ...
 $(x, y, z) \in Q \iff \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = 0 \iff (x, y, z) \perp (1, 1, 1)$, donc $Q^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et une base orthonormale de Q^\perp est (u) avec $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

$$\text{Donc } p_{Q^\perp}((x, y, z)) = \langle (x, y, z), u \rangle u = \frac{1}{3}(x + y + z).$$

$$\text{D'où } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_{Q^\perp}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } p_Q + p_{Q^\perp} = id_E \text{ donc } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_Q) = I_3 - \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_{Q^\perp}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- $s = 2p_Q - id_E$ donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(s) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 4 Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose, pour A et B dans E , $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

- Montrer que

$$\forall A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

- Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?
- Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer Δ^\perp .
- Montrer que le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

Solution (Ex.4 – Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

- Calculons explicitement $\langle A, B \rangle$ en fonction des coefficients de A et B.

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{Tr}((A^T B)) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (A^T)_{i,j} (B)_{j,i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{j,i} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{j,i} b_{j,i} \end{aligned}$$

ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.

À retenir :

$\langle A, B \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de \mathbb{R}^n .

En particulier, $\langle A, A \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique car $\text{Tr}((A^T B)) = \text{Tr}((B^T A)^T) = \text{Tr}(B^T A)$.
 est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $A = 0$.
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positif et défini.
- Comme vu plus haut, $\langle E_{i,j}, E_{k,\ell} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$.
 Si $(i, j) \neq (k, \ell)$, le seul « 1 » des matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\langle E_{i,j}, E_{k,\ell} \rangle = 0$
 De plus, $\|E_{i,j}\|^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.
 Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.
- Déterminer Δ^\perp (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de Δ). La famille $(E_{i,i})_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de Δ , orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Première approche -
 Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Vect}((E_{i,j})_{i \neq j})$ est le supplémentaire orthogonal de Δ ...
 - Seconde approche -

Si $A \in \Delta^\perp$, alors $A \perp E_{i,i}$ pour tout i . Or $\langle A, E_{i,i} \rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout i .

- Bilan, par l'une ou l'autre approche -
 Δ^\perp est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 5 *Isométries diagonalisables*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$.

On suppose f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (Ex.5 – Isométries diagonalisables)

f est une isométrie donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 : $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Trois cas sont possibles :

- $\text{Sp}(f) = \{1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = 1 \times id_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = -1 \times id_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, et comme f est diagonalisable, dans une base propre \mathcal{B} , $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ (avec $p = \dim(\text{SEP}(f, -1))$ et $q = \dim(\text{SEP}(f, 1))$).

Dans les trois cas, $f^2 = id_E$.

Donc f est une symétrie, toujours d'axe E_1 et de direction E_{-1} .

Soit $u \in E_1$ et $v \in E_{-1}$.

f est orthogonale donc conserve le produit scalaire, donc $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$, donc $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \perp v$.

Ceci prouve que $E_1 \perp E_{-1}$ donc que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 6 *Complémentaire d'une isométrie*

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E.

On pose $g = id_E - f$.

Montrer que $\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^\perp$.

Solution (Ex.6 – Complémentaire d'une isométrie)

Soit $x \in \text{Ker}(g)$ et $y \in \text{Im}(g)$.

$x \in \text{Ker}(g)$ donc $x = f(x)$.

Soit $z \in E$ tel que $y = g(z) = z - f(z)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, z - f(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle f(x), f(z) \rangle$ car $x = f(x)$,

$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle$ car f conserve le produit scalaire.

$\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi : $\text{Ker}(g) \perp \text{Im}(g)$.

$$a^2 + c^2 = a^2 + bc \text{ et } b^2 + d^2 = bc + d^2, \text{ donc } c^2 = bc \text{ et } b^2 = bc.$$

Si $c \neq 0$, on en déduit $b = c$ et M est symétrique.

Si $c = 0$, alors $b^2 = 0$ donc $b = 0 = c$ et M est symétrique.

Exercice 9 Une formule pour les matrices de projections orthogonales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $X \in E$, X^T désigne la transposée de X .

Soit $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension d .

1. On suppose que (U_1, \dots, U_d) une base orthonormale de F .

$$\text{Soit } M = \sum_{i=1}^d U_i U_i^T.$$

Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E .

2. On suppose que (C_1, \dots, C_d) une base quelconque de F et on note A la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{R})$ donc les colonnes sont C_1, \dots, C_d .

a) Montrer que, pour tout X de E ,

i – $X \in F \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AY = X,$

ii – $X \in F^\perp \iff A^T X = 0.$

b) Montrer que $A^T A$ est une matrice inversible. On pourra déterminer $\text{Ker}(A^T A)$.

c) Soit $M = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Montrer que M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E .

3. Application - Impératif d'utiliser ce qui précède! Déterminer la matrice de la projection orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sur le plan \mathcal{P} d'équation $x + y + z = 0$

a) en utilisant une base quelconque de F ,

b) en utilisant une base orthonormale de F .

Solution (Ex.9 – Une formule pour les matrices de projections orthogonales)

1. $\forall X \in E,$

$$MX = \sum_{i=1}^d U_i U_i^T X = \sum_{i=1}^d U_i \langle U_i, X \rangle = \sum_{i=1}^d \langle X, U_i \rangle U_i = p_F(X)$$

d'après la propriété du cours, puisque (U_1, \dots, U_d) est une base orthonormale de F .

2. a) i – Il suffit d'observer que si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$, alors

$$AY = \sum_{i=1}^d y_i C_i.$$

Comme (C_1, \dots, C_d) est une base de F , donc une famille génératrice, on a bien :

$$X \in F \iff \exists Y \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AY = X.$$

ii – Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), A^T X = \begin{pmatrix} \langle C_1, X \rangle \\ \vdots \\ \langle C_d, X \rangle \end{pmatrix}.$

Comme (C_1, \dots, C_d) est une base de $F, A^T X = 0 \iff X \in F^\perp.$

- b) • $A^T A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).$

• Soit $X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}).$

$$X \in \text{Ker}(A^T A) \implies X^T A^T A X = 0 \implies \|AX\|^2 = 0 \implies AX = 0.$$

Or $AX = \sum_{i=1}^d x_i C_i$ et (C_1, \dots, C_d) est une base de F , donc une famille libre.

Donc $AX = 0 \implies X = 0.$

Ainsi $\text{Ker}(A^T A) = \{0\}.$

• Par la formule du rang, $\text{rg}(A^T A) = d$ donc $A^T A$ est inversible.

- c) Soit $M = A(A^T A)^{-1} A^T.$

Soit $X \in E$ et $Y = MX.$

① Comme $Y = A[(A^T A)^{-1} A^T] X$ avec $(A^T A)^{-1} A^T \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), Y \in F$ d'après i.

② $A^T(X - Y) = A^T X - A^T A(A^T A)^{-1} A^T X = A^T X - A^T X = 0$ donc d'après ii $X - Y \in F^\perp.$

③ Ainsi $Y \in F$ et $X - Y \in F^\perp$, donc Y est le projeté orthogonal de X sur F .

④ Ceci étant vrai pour tout X de E, M représente la projection orthogonale sur F dans la base canonique de E .

3. a) Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Alors $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (A^T A)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Par le procédé de Gram-Schmidt, prenons

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$U_1 U_1^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_2 U_2^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et

$$M = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 *Projections sur des droites et des hyperplans*

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $n \geq 2$, muni du produit scalaire canonique.

1. a) Soit $U \in E \setminus \{0\}$ et $\Delta = \text{Vect}(U)$.

Montrer que $P = \frac{1}{\|U\|^2} U^t U$ est la matrice de la projection orthogonale sur Δ dans la base canonique.

b) En déduire la matrice Q représentant la projection orthogonale sur l'hyperplan Δ^\perp .

2. En exploitant ce qui précède, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale ayant pour axe l'hyperplan

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\}.$$

Exercice 11 *Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et n un entier naturel au moins égal à 2.

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère

$$\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto aM + bM^T.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
2. a) Rappeler la définition du produit scalaire canonique de E .
b) Justifier que φ est diagonalisable.
3. a) Déterminer les éléments propres de φ .
b) Préciser $\det(\varphi)$ et $\text{Tr}(\varphi)$.
4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une projection orthogonale?
b) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une symétrie orthogonale?

Exercice 12 *Diagonalisation orthogonale des matrices J_n*

Soit $n \geq 2$, $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Justifier que J_n est diagonalisable, et possède exactement deux sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
2. En déduire l'existence d'une matrice $P_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$J_n = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^T.$$

3. Expliciter une matrice P_2 convenable.
4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec J_2 , alors il existe $(a, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T$$

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_n = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Que vaut $P_n^T M_n P_n$?

Solution (Ex.12 – Diagonalisation orthogonale des matrices J_n)

1. $\text{rg}(J_n) = n - 1$ donc $0 \in \text{Sp}(J_n)$ et $\dim E_0 = n - 1$.
De plus : $E_0 = \text{Vect}(E_1 - E_2, E_1 - E_3, \dots, E_1 - E_n)$.

J_n possède au plus une autre valeur propre, dont le sous-espace propre associé sera de dimension 1.

En notant $U_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne ne contenant que des « 1 », $J_n U_n = nU_n$ donc $n \in \text{Sp}(J_n)$ et $E_n = \text{Vect}(U_n)$.

Donc J_n est diagonalisable et $E_0 \oplus E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Comme : $\forall j \in \llbracket 2; n \rrbracket, \langle E_1 - E_j, U_n \rangle = 0$, on a $E_0 \perp E_n$.

2. Soit (C_1, \dots, C_{n-1}) une base orthonormale de E_0 (obtenue par exemple par le procédé de Gram-Schmidt) et $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}}U_n$.

Alors la matrice de passage P_n de la base canonique orthonormale à la base (C_1, \dots, C_n) elle aussi orthonormale est une matrice orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de J_n , d'où

$$J_n = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^{-1} = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^T.$$

3. Pour $n = 2$, $E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.

4. Notons $J = J_2$, $P = P_2$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que $J = PDP^{-1}$, et notons

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En multipliant par P^{-1} et P :

$$AJ = JA \iff BD = DB \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \iff b = c = 0.$$

$$\text{Donc } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \text{ i.e. } A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T.$$

Exercice 13 Des produits scalaires sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

1. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^T A$ est symétrique positive et définie.
2. Montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. On ne suppose maintenant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. La formule précédente définit-elle encore un produit scalaire ?