Exercice 1

Soit f_n la fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = x^n(1-x^2).$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de terme général f_n.
3. Étudier la convergence normale et uniforme de la série de terme général f_n sur $[-1\,;\,\alpha]$, lorsque α appartient à $[0\,;\,1[$.

Solution (**Ex.1** –)

1. • $\forall x \in]-1\,;\,1[, x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f_n(-1) = f_n(1) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $f_n \xrightarrow{CVS} 0$.
   • f_n étant paire ou impaire, $||f||_{\infty,[-1\,;\,1]} = ||f||_{\infty,[0\,;\,1]}$. Une étude de fonction montre que $||f_n||_{\infty,[0\,;\,1]} = f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right) \leqslant \dfrac{2}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la convergence est uniforme.
2. • Par convergence de la série géométrique sur $]-1\,;\,1[$ et comme $f_n(-1) = f_n(1) = 0$ $(\forall n)$, la série de terme général f_n converge simplement et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}(1-x^2) = 1+x & \text{si } x \in]-1\,;\,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
   • La somme n'étant pas continue en 1 alors que les f_n le sont toutes, la convergence n'est pas uniforme, ni normale. Notons qu'il n'y a pas de problème de continuité en -1.
3. • Par parité et par l'étude précédente, $||f_n||_{\infty,[-1\,;\,\alpha]} = f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right) = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{n/2} \dfrac{2}{n+2}$.
   $\dfrac{n}{2}\ln\dfrac{n}{n+2} = \dfrac{n}{2}\ln\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$ donc $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-1}}{n}$
   et $||f_n||_{\infty,[-1\,;\,\alpha]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2e^{-1}}{n}$ et la série des normes diverge. Il n'y a pas convergence normale.
   • Étude de la convergence uniforme sur $[-1\,;\,0]$.
   Pour x dans $[-1\,;\,0]$, la suite $\left(|x|^n(1-x^2)\right)$ est décroissante de limite nulle, donc par le théorème des séries alternées $|R_n(x)| \leqslant \left|x^{n+1}(1-x^2)\right| \leqslant ||f_n||_\infty \leqslant \dfrac{2}{n+2}$.
   Donc $||R_n||_{\infty,[-1\,;\,0]} \leqslant \dfrac{2}{n+2}$. Ainsi $||R_n||_{\infty,[-1\,;\,0]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la convergence de la série est uniforme sur $[-1\,;\,0]$.
   • Étude de la convergence uniforme sur $[0\,;\,\alpha]$.
   f_n est positive et croissante sur $\left[0\,;\,\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\right]$, donc comme $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\alpha < 1$, il existe n_0 tel que
   $$\forall n \geqslant n_0, \quad \alpha \leqslant \sqrt{\frac{n}{n+2}}.$$
   Pour $n \geqslant n_0$, f_n est positive et croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et
   $$\forall n \geqslant n_0, \quad ||f_n||_{\infty,[0\,;\,\alpha]} = f_n(\alpha) = \alpha^n(1-\alpha^2).$$
   Comme la série $\sum f_n(\alpha)$ converge, il y a convergence normale donc uniforme.
   • Bilan : il y a convergence uniforme sur $[-1\,;\,\alpha]$.

Exercice 2

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^\alpha e^{-nx} \text{si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

où α est un nombre réel strictement positif.

1. Déterminer la somme de la série de terme général f_n.
2. Montrer qu'on a convergence normale si $\alpha > 1$, et que, si $\alpha \leqslant 1$, on n'a pas convergence uniforme.
3. Montrer que, pour tout $s > 0$, on a convergence normale sur $[s\,;\,+\infty[$.

Solution (**Ex.2** –)

1. $f_n(x) = x^\alpha\left(e^{-x}\right)^n$ donc on a une série géométrique de raison $e^{-x} \in]0\,;\,1[$ pour $x > 0$. Et comme $f_n(0) = 0$, on a
   $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{x^\alpha}{1-e^{-x}} \text{si } x > 0 \text{ et } S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$$
2. • Cas $\alpha > 1$.
   $f_n'(x) = \left(\alpha x^{\alpha-1} - nx^\alpha\right)e^{-nx} = (\alpha - nx)\,x^{\alpha-1}e^{-nx}$ donc f_n est positive, croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\alpha}{n}\right]$ puis décroissante.
   $||f_n||_\infty = f_n\left(\dfrac{\alpha}{n}\right) = \left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^\alpha e^{-\alpha} = \dfrac{\alpha^\alpha e^{-\alpha}}{n^\alpha}$.

La série de terme général $||f_n||_\infty$ converge : c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$.
Il y a donc convergence normale.
• Cas $\alpha \leqslant 1$.
L'étude précédente montre qu'il n'y a pas convergence normale par divergence de la série de Riemann.
$\mathrm{S}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^\alpha}{x} \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha-1}$ car $1-\mathrm{e}^{-x} = 1-1+x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Donc $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$.
Dans tous les cas, $\mathrm{S}(x)$ ne tend pas vers $\mathrm{S}(0) = 0$ lorsque x tend vers 0 : S n'est pas continue en 0 donc la convergence ne peut pas être uniforme puisque toutes les f_n sont continues.

3. Dès que $\dfrac{\alpha}{n} \leqslant s$, c'est-à-dire $n \geqslant \dfrac{\alpha}{s}$, f_n est décroissante et positive sur $[\,s\,;\,+\infty[$ donc $||f_n||_{\infty,[\,s\,;\,+\infty[} = f_n(s)$. Or la série de terme général $f_n(s)$ converge (question 1), donc il y a convergence normale sur $[\,s\,;\,+\infty[$.

Exercice 3
Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < \mathrm{R}$ la somme

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{(-1)^n n}}{n} x^n.$$

Que se passe-t-il si $|x| = \mathrm{R}$?

Solution (**Ex.3** –)

• Le rayon de convergence de cette série est le même que celui de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} x^n$.

Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = 2^{(-1)^n n}$. Alors $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$
Ainsi pour $\rho \in [\,0\,;\,1/2]$, $|a_n\rho^n| \leqslant 1$ donc $(a_n\rho^n)$ est bornée et $\mathrm{R} \geqslant 1/2$.
Mais pour $x = 1/2$, $a_{2n}x^{2n} = 1$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.
Donc $\mathrm{R} = 1/2$.
• Soit $x \in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$.
Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ $b_n = \dfrac{2^{(-1)^n n}}{n}$, donc

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{et} \quad b_{2n} = \frac{1}{2n}2^{2n}.$$

Un petit calcul préalable bien utile quand on doit distinguer les indices pairs et impairs...
Manifestement, nous allons être confrontés à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$, c'est-à-dire les parties impaire et paire de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
Or la partie impaire d'une fonction f est $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$ et sa partie paire $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f - x)\right)$.
Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ pour $|x| < 1$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n}x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x)^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-4x^2\right)$ car $0 \leqslant 4x^2 < 1$.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.
Donc $\mathrm{S}(x) = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) - \ln(1-4x^2)\right]$.
• Si $x = \pm\mathrm{R} = \pm 1/2$, la série diverge grossièrement car $a_{2n}x^{2n} = 1$ ne tend pas vers 0..

Exercice 4
Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout nombre réel x tel que $|x| < \mathrm{R}$ la somme

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n.$$

On pourra commencer par calculer $(1+x)\mathrm{S}(x)$.
Que se passe-t-il si $|x| = \mathrm{R}$?

Solution (**Ex.4** –)

• Notons $\mathrm{H}_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ la n-ième somme partielle de la série harmonique et $a_n = (-1)^{n+1}\mathrm{H}_n$.

$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) = o(n)$ donc R est supérieur au rayon de la série de terme général nx^n, qui vaut 1.
Pour $x = 1$, $|a_n x^n| = \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
Donc $\mathrm{R} = 1$.
On peut aussi utiliser le critère de D'Alembert : $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc $\mathrm{R} = 1/1 = 1$.

• Soit $x \in\,]-1\,;\,1[$.

$$\begin{aligned}
(1+x)\mathrm{S}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\mathrm{H}_n x^n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\mathrm{H}_n x^{n+1}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n+1}\mathrm{H}_n x^n\right) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((-1)^{n}\mathrm{H}_{n-1} x^{n}\right)\\
&= x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n}(\mathrm{H}_{n-1}-\mathrm{H}_n) x^{n}\right)\\
&= x - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = x + \ln(1+x)
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{S}(x) = \dfrac{x+\ln(1+x)}{1+x}$.

• Pour $x = \pm 1$, $|a_n x^n| = \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.

Exercice 5

Pour $t > 1$ on note

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^t} \quad \text{et} \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Les fines mouches et les fins limiers auront reconnu la fonction zêta de Riemann et la fonction gamma d'Euler.

1. Montrer que, pour $t > 1$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(t)\Gamma(t).$$

On pourra utiliser les fonctions $f_n : x \mapsto x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}$...

2. Montrer que, pour $t > 1$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)\Gamma(t).$$

Et si on adaptait la stratégie précédente ?

3. On donne $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\Gamma(2) = 1$. Que valent $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$?

Solution (**Ex.5** –)

1. On pose $f_n : x \mapsto x^{t-1}\mathrm{e}^{-(n+1)x}$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

① Les f_n sont continues et intégrables. En effet
$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \overset{u=(n+1)x}{=} \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n+1}\right)^{t-1}\mathrm{e}^{-u}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$$

② La série de terme général f_n converge simplement vers la fonction S : $x \longmapsto x^{t-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x-1}$.

③ S est continue.

④ La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$ converge car c'est une série de Riemann avec $t > 1$.

Par le théorème de permutation, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$, i.e. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x = \zeta(t)\Gamma(t)$.

2. *Adaptons la stratégie précédente...*
On pose $g_n : x \mapsto -x^{t-1}\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^{n+1} = (-1)^n f_n(x)$ sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

① Les g_n sont continues et intégrables :
$$\int_0^{+\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$$

② La série de terme général g_n converge simplement vers la fonction S : $x \longmapsto x^{t-1}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x+1}$.

③ S est continue.

④ La série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^t}\Gamma(t)$ converge car c'est une série de Riemann avec $t > 1$.

Par le théorème de permutation, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t}\Gamma(t)$.

Il reste à exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t}$ à l'aide de $\zeta(t)$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^t} = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{(n+1)^t} - \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{(n+1)^t}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^t} = \left(\zeta(t) - \frac{1}{2^t}\zeta(t)\right) - \frac{1}{2^t}\zeta(t) = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)$$

, i.e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(t)\Gamma(t)$.

Finalement on a bien $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{1}{2^{t-1}}\right)\zeta(t)\Gamma(t)$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \zeta(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\zeta(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{12}$.