Exercice 1 *EDL : applications directes du cours*

Résoudre les équations différentielles suivantes, où y désigne une fonction de x suffisamment dérivable sur le domaine indiqué :

1. $y' = (1+y)\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}$ **2.** $3xy' - 4y = x, \qquad x \in \left]0\,;\,+\infty\right[$

3. $y'' + y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$ **4.** $y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad x \in \mathbb{R}$

6. $y'' + 2y' + y = xe^x, \qquad x \in \mathbb{R}$ (solution part$^{\text{iè re}}$ de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$)

Solution (**Ex.1** – *EDL : applications directes du cours*)

Je note (E) l'équation différentielle à résoudre, éventuellement (H) l'équation homogène associée.

1. (H) $\iff y' - (\sin x)y = 0$.
Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
$x \mapsto -1$ est solution particulière évidente de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \mathrm{C}e^{-\cos x} - 1 \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

2. (H) $\iff y' - \dfrac{4}{3x}y = 0$.
Les solutions de (H) sont : $x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ quelconque.
Recherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante.
Soit $f : x \mapsto \mathrm{C}(x)x^{4/3}$ où $\mathrm{C} : x \mapsto \mathrm{C}(x)$ est dérivable sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$.
$(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[, \quad 3xf'(x) - 4f(x) = x) \iff$
$\left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[, \quad 3x\big(\mathrm{C}'(x)x^{4/3} + \mathrm{C}(x)\dfrac{4}{3}x^{1/3}\big) - 4\mathrm{C}(x)x^{4/3} = x\right) \iff$
$\big(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[, \quad 3x^{7/3}\mathrm{C}'(x) = x\big) \iff$
$\left(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[, \quad \mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-4/3}\right) \iff$
$\exists k \in \mathbb{R}, \big(\forall x \in \left]0\,;\,+\infty\right[, \quad \mathrm{C}(x) = -x^{-1/3} + k\big)$
Donc $x \mapsto -x$ est solution particulière (évidente??????... si on avait retiré nos lunettes en contre-plaqué) de (E).
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \mathrm{C}x^{4/3} - x \text{ où } \mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ quelconque.}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, de solutions $r = \pm i$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficient constant d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
ques Il s'agit d'une équation différentielle (E) du second ordre à coefficient constant, dont l'équation homogène (H) associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$, de solution double -1.
Les solutions de (H) sont :
$$x \mapsto \big(\lambda x + \mu\big)e^{-x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
On cherche une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax+b)e^x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$,
$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\big((a + ax + a + b) + 2(ax + a + b) + ax + b\big)$
$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = e^x\big(4ax + 4a + 4b\big)$
Alors $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -a$ fournit une solution particulière $x \mapsto \dfrac{x-1}{4}e^x$.
Les solutions de (E) sont :
$$x \mapsto \big(\lambda x + \mu\big)e^{-x} + \frac{x-1}{4}e^x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 2 *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$,

2. $y'' + y = 2\cos^2(x)$.

Solution (**Ex.2** – *Exemples d'EDL2 avec second membre trigonométrique*)

1. L'équation différentielle homogène associée du second ordre à coefficient constant (H) a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$, de solutions $-1 \pm i$.
Les solutions de (H) sont :
$$x \mapsto \big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big)e^{-x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $x \mapsto a \sin x + b \cos x$. Après substitution $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \dfrac{-2}{5}$.
Les solutions de cette équation différentielle sont finalement :
$$x \mapsto \big(\lambda \cos x + \mu \sin x\big)e^{-x} + \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{2}{5}\cos(x) \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

2. On procède de façon analogue.
Les solutions de l'équation homogène associée sont :
$$x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$
Pour trouver une solution particulière de $y''+y = 2\cos^2(x)$, on observe que $2\cos^2(x) = \cos(2x)+1$ et on s'intéresse alors aux équations d'inconnues $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$(\mathrm{E}_1) \quad z'' + z = \cos(2x) \text{ et } (\mathrm{E}_2) \quad w'' + w = 1.$$
Si z est solution de E_1 et w de (E_2), par superposition $y+w$ sera solution de l'équation initiale.

Tout calcul fait, $y : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\cos(2x)$ convient et $w : x \mapsto 1$ est solution évidente.
Les solutions de l'équation avec second membre sont :

$$x \mapsto \lambda\cos x + \mu \sin x + 1 - \frac{1}{3}\cos(2x) \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconque.}$$

Exercice 3 *Exemple de variation des constantes*

1. Quelles sont les solutions de : $y'' + y = 0$
où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable ?

2. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)}: \qquad y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.
Résoudre (E) en cherchant une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$ où A et B sont deux fois dérivables et vérifient $\mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0$.

Solution (**Ex.3** – *Exemple de variation des constantes*)

1. $\mathcal{S}_{\mathrm{H}} = \mathrm{Vect}(\cos,\sin) = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$
Voir exercice *Applications directes du cours.*

2. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)}: \qquad y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

où $y :]-\pi/2\,;\ \pi/2[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

a) *Analyse* –
Soit A et B deux fonctions deux fois dérivables sur $]-\pi/2\,;\ \pi/2[$ vérifiant

$$\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[, \quad \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0.$$

On suppose que $y : x \mapsto \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$ vérifie (E).
$\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$,
$y(x) = \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}(x)\sin x$
$y'(x) = \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x = -\mathrm{A}(x)\sin x + \mathrm{B}(x)\cos x$
par les hypothèses sur A et B.
$y''(x) = -\mathrm{A}'(x)\sin x - \mathrm{A}(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\cos x - \mathrm{B}(x)\sin x$
$y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$
Finalement, pour tout $x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$, $\mathrm{A}'(x)$ et $\mathrm{B}'(x)$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\mathrm{A}'(x)\sin x + \mathrm{B}'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x} \\ \mathrm{A}'(x)\cos x + \mathrm{B}'(x)\sin x = 0 \end{cases}$$

donc $\mathrm{A}'(x) = -\tan x$ et $\mathrm{B}'(x) = 1$, et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{A} : x \mapsto \ln(\cos x) + \lambda$ et $\mathrm{B} : x \mapsto x + \mu$.
Synthèse –
Soit $y : x \mapsto \ln(\cos x)\cos x + x\sin x$. Alors :
$y' : x \mapsto -\sin x - \ln(\cos x)\sin x + \sin x + x\cos x = -\ln(\cos x)\sin x + x\cos x$
$y'' : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \ln(\cos x)\cos x + \cos x - x\sin x.$
Et : $\forall x \in]-\pi/2\,;\ \pi/2[$,
$y''(x) + y(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}.$
y est une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions de (E) est donc :

$$\left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \ln(\cos x)\cos x + x\sin x / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 4 *Équation différentielle et série entière*

1. Résoudre sur $]-1\,;\ 1[$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x+1)y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. En déduire, *sans utiliser les séries de référence*, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

Solution (**Ex.4** – *Équation différentielle et série entière*)

1. La solution de ce problème de Cauchy est $y : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

2. • Supposons y développable en série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$.
Écrivons $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$. Alors

$$(x+1)y(x) + y(x) = (x+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_n + (n+1)a_{n+1}\big)x^n + a_1 + a_0$$

Par unicité du DSE,
y est solution du problème de Cauchy ssi

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -a_n \\ a_1 + a_0 = 0 \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{ssi } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n$$

Le rayon de convergence de cette série est 1.

• Réciproquement, les équivalences précédentes montrent que $y : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ est solution du problème sur $]-1\,;\,1[$.
• Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on a :

$$\forall x \in \,]-1\,;\,1[, \quad \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Exercice 5 *Étude d'un système différentiel*
On souhaite déterminer toutes les fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

On pose $\mathrm{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathcal{S}) \iff \mathrm{X}' = \mathrm{MX}$.
2. Déterminer P telle que $\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{MP}$ soit une matrice diagonale, notée D.
3. On pose $\mathrm{Y} = \mathrm{PX}$. Montrer que $(\mathcal{S}) \iff \mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$.
4. Résoudre $(\mathcal{S})$

Solution (**Ex.5** – *Étude d'un système différentiel*)
$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{P} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha \exp(3t) \\ \beta \exp(-t) \end{pmatrix}$,
$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \exp(3t) + b \exp(-t) \\ a \exp(3t) - b \exp(-t) \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.