

1. Trouver la loi d'un temps d'attente...

Tous les schémas ne sont pas des schémas de Bernoulli...

Exercice 1 La loi du sauteur en hauteur - Transferts

Dans un concours de saut, la probabilité qu'un sauteur passe la n -ème barre est $\frac{1}{n}$ et est indépendante des sauts précédents.

On note X le numéro de la dernière barre que le sauteur a franchi avant d'échouer.

1. Donner la loi de X et vérifier que $\sum_{x \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ existent et les calculer. On observa qu'on a intérêt à commencer par calculer $\mathbb{E}(X + 1)$, puis $\mathbb{E}(X^2 - 1)$.

Solution (Ex.1 - La loi du sauteur en hauteur - Transferts)

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.
2. $\mathbb{E}(X + 1) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \stackrel{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X) \stackrel{\text{lin.}}{=} e - 1$.
 $\mathbb{E}(X^2 - 1) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)n(n+1)}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \stackrel{\text{expon.}}{=} e$, $\mathbb{E}(X^2) \stackrel{\text{lin.}}{=} e + 1$,
 $\mathbb{V}(X) = 3e - e^2$.

Exercice 2 Sans espoir ... - Absence d'espérance

Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche.

On procède à une succession de tirages suivant le processus : à chaque tirage, on prélève une boule au hasard et on la remet accompagnée d'une autre boule de la même couleur. On note T le temps d'attente du premier tirage d'une boule noire.

1. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n)$ et vérifier que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(T = n) = 1$.
2. T possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Solution (Ex.2 - Sans espoir ... - Absence d'espérance)

1. $\mathbb{P}(T = n) \stackrel{\text{FPC}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge, $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Exercice 3 Urne de Polya

On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules dont une est rouge et les autres sont blanches.

On tire au hasard une à une des boules dans cette urne suivant le protocole :

☞ si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne pour le tirage suivant ; ☞ si la boule tirée est blanche, on l'ôte de l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On note T le temps d'attente de la boule rouge, c'est-à-dire le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la rouge pour la première fois.

Déterminer la loi de T , son espérance et sa variance.

Solution (Ex.3 - Urne de Polya)

$T(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap R_k) \stackrel{\text{FPC}}{=} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \frac{1}{n-k+1}$$

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{n}$$

Donc $T \sim \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et $\mathbb{E}(T) = (n+1)/2$, $\mathbb{V}(T) = (n^2 - 1)/12$.

Exercice 4 La loi de Pascal - I

On s'intéresse à un schéma de Bernoulli (ou processus bernoullien) de probabilité de succès p .

Pour tout i de \mathbb{N}^* on note T_i la variable aléatoire égale au rang d'obtention du i -ème succès et S_i l'évènement « la i -ème épreuve est un succès ».

Dans cet exercice, on vérifie rigoureusement l'idée intuitive de T_i est la somme de i variables i.i.d. de loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \geq 1$.
 - a) Déterminer le support de T_i .
 - b) Déterminer pour $k \in T_i(\Omega)$ la probabilité $\mathbb{P}_{S_k}(T_i = k)$ et en déduire la loi de T_i .
2. Soit $i \geq 1$.
 - a) Déterminer la loi de la variable aléatoire G_i définie par $G_1 = T_1$, et pour $i \geq 2$, $G_i = T_i - T_{i-1}$.
Commenter.
 - b) En déduire l'espérance de T_i .
3. Soit $i \geq 2$.
 - a) Montrer que T_{i-1} et G_i sont indépendantes.
 - b) En déduire la variance de T_i .
4. Soit $k \in T_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[T_2 = k]$.
Commentaire ?

Solution (Ex.4 - La loi de Pascal - I)

1. a) Soit $i \geq 1$. $T_i(\Omega) = \llbracket i, +\infty \llbracket$

b) $\mathbb{P}_{S_k}(T_i = k) = \mathbb{P}(\text{« } i - 1 \text{ succès en } k - 1 \text{ épreuves »}) = \binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_i = k) &\stackrel{\text{FPT}}{=} \mathbb{P}(S_k) \mathbb{P}_{S_k}(T_i = k) + \mathbb{P}(\overline{S_k}) \mathbb{P}_{\overline{S_k}}(T_i = k) \\ &= p \binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{k-i} + 0 = \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}. \end{aligned}$$

2. Soit $i \geq 2$.

a) $G_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_i = k) &\stackrel{\text{FPT}}{=} \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_{i-1} = j] \cap [G_i = k]) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_{i-1} = j] \cap \overline{S_{j+1}} \cap \\ &\overline{S_{j+2}} \cap \dots \cap S_{j+k}) = \sum_{j=i-1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_{i-1} = j] q^{k-1} p = q^{k-1} p \times 1 \text{ par indépendance des} \\ &\text{épreuves.} \end{aligned}$$

Donc $G_i \sim \mathcal{G}(p)$.

$T_i = T_{i-1} + G_i$ où $G_i \sim \mathcal{G}(p)$: chaque nouveau succès est régi par une attente suivant une loi géométrique.

b) $\mathbb{E}(T_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=2}^i (T_j - T_{j-1}) + T_1\right) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{j=1}^i \mathbb{E}(G_j) = \frac{i}{p}$.

3. Soit $i \geq 2$.

a) $\mathbb{P}([T_{i-1} = j] \cap [G_i = k]) = \mathbb{P}([T_{i-1} = j] \cap \overline{S_{j+1}} \cap \overline{S_{j+2}} \cap \dots \cap S_{j+k}) = \mathbb{P}([T_{i-1} = j] q^{k-1} p = \mathbb{P}([T_{i-1} = j] \mathbb{P}([G_i = k]))$

b) $\mathbb{V}(T_i) = \mathbb{V}\left(\sum_{j=2}^i (T_j - T_{j-1}) + T_1\right) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{j=1}^i \mathbb{V}(G_j) = \frac{iq}{p^2}$.

4. $\mathbb{P}_{[T_2=k]}(T_1 = n) = \frac{\mathbb{P}(T_1 = n, T_2 = k)}{\mathbb{P}(T_2 = k)}$ Soit $k \in T_2(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de T_1 sachant $[T_2 = k]$.
Commentaire ?

2. Lois de sommes sans les fonctions génératrices

Lorsqu'on calcule la loi de la somme de deux variables indépendantes, on parle de *convolution*. Le calcul lorsqu'on n'utilise pas les fonctions génératrices repose en général sur

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ tq } k-i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Expliquer rigoureusement cette formule !

Exercice 5 Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y et Z trois variables indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Montrer que, pour tout k de $\llbracket 2; 2n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{\max(1, k-n) \leq i \leq \min(n, k-1)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

2. En déduire $\mathbb{P}(X + Y = k)$ suivant que $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ ou $k \in \llbracket n; 2n \rrbracket$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y = Z) = \frac{n-1}{n^2}$.

4. Je lance trois dés justes à six faces numérotées de 1 à 6. Quelles est la probabilité que la somme de deux des numéros obtenus soit égale au troisième ?

Solution (Ex.5 - Somme de deux uniformes indépendantes - « Convolution »)

1. Clairement $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 2; 2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 2; 2n \rrbracket$.

$$[X + Y = k] = \bigcup_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} ([X = i] \cap [Y = k - i]).$$

Par incompatibilité de ces événements, puis indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i \in X(\Omega) \text{ et } k-i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

Précisons la plage de sommation :

$$(i \in X(\Omega) \text{ et } k - i \in Y(\Omega)) \iff (1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq k - i \leq n)$$

$$\iff (1 \leq i \leq n \text{ et } k - n \leq i \leq k - 1)$$

$$\iff \max(1, k - n) \leq i \leq \min(n, k - 1)$$

2. • $2 \leq k \leq n$ donc $\max(1, k - n) = 1$ et $\min(n, k - 1) = k - 1$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}.$$

• $n + 1 \leq k \leq 2n$ donc $\max(1, k - n) = k - n$ et $\min(n, k - 1) = n$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=k-n}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=k-n}^n \frac{1}{n^2} = \frac{2n - k + 1}{n^2}.$$

3. À l'aide du système complet d'événements $([Z = k])_{1 \leq k \leq n}$,

$$\mathbb{P}(X + Y = Z) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = Z)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((Z = k) \cap (X + Y = k))$$

$$\stackrel{\text{indép.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Z = k) \mathbb{P}(X + Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n}{2} =$$

$$\frac{n-1}{2n^2}.$$

4. Avec $n = 6$, en notant X, Y et Z les numéros des 3 dés,

$$\mathbb{P}((X + Y = Z) \cup (X + Z = Y) \cup (Y + Z = X)) \stackrel{\text{incomp.}}{=} \\ \mathbb{P}(X + Y = Z) + \mathbb{P}(X + Z = Y) + \mathbb{P}(Y + Z = X) = 3 \times \frac{6-1}{2 \times 6^2} = \frac{5}{24}.$$

Exercice 6 Autour des lois binomiales et de Poisson

- Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(l)$ et $\mathcal{P}(m)$ respectivement.
 - Montrer que la loi de $X + Y$ est encore une loi de Poisson en précisant son paramètre.
 - Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $(X + Y = n)$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Montrer que si Y est une v.a.r. suivant la loi Poisson $\mathcal{P}(l)$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnée par $(Y = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Solution (Ex.6 – Autour des lois binomiales et de Poisson)

- Pour $k > n$, $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X = k) = 0$ (fatalement).

$$\text{Pour } 0 \leq k \leq n, \mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X = k) = \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k))}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \\ \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{e^{-l}l^k}{k!} \frac{e^{-m}m^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-(l+m)}l^n} = \\ \binom{n}{k} \left(\frac{l}{l+m}\right)^k \left(\frac{m}{l+m}\right)^{n-k} \dots \text{loi binomiale } \mathcal{B}\left(n, \frac{l}{l+m}\right), \text{ non ?}$$

- La FPT pour le SCE $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}}$ donne

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)\mathbb{P}_{[Y=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-l} \frac{l^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\ \frac{e^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{i=n-k}{=} \frac{e^{-l}}{k!} (pl)^k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[l(1-p)]^i}{i!} = \frac{e^{-l}e^{l(1-p)}(lp)^k}{k!} = \\ \frac{e^{-lp}(lp)^k}{k!} \text{ donc } X \sim \mathcal{P}(l).$$

Exercice 7 Loi de Pascal - II

Soit X et Y deux VAR i.i.d. de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminer la loi de $X + Y$.

3. Autour des minimums ou des maximums

Exercice 8 Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Z = \min(X, Y)$. L'objectif est de déterminer la loi de Z .

1. Première méthode

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(X \geq k)$? En déduire $\mathbb{P}(Z \geq k)$ puis montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

2. Seconde méthode

On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

- Quel est la loi de A et de D ?
- Quel est la probabilité de l'événement « le premier lancer amène au moins un pile »?
- On note P le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile, sans distinction de couleur. Quel est la loi de P ?
- Conclure.

Solution (Ex.8 – Minimum de deux variables géométriques par deux méthodes)

Soit $q = 1 - p$.

1. Première méthode

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$ ($k-1$ échecs successifs).

$$\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}([X \geq k] \cap [Y \geq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^{k-1}q^{k-1} = q^{2k-2}.$$

$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1) = q^{2k-2} - q^{2k} = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$ ce qui prouve que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2 = p(2 - p)$.

2. Seconde méthode

On lance indéfiniment simultanément deux pièces, l'une argentée et l'autre dorée, ayant toutes deux la probabilité p d'amener pile. On note A et D respectivement le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier pile avec la pièce argentée, respectivement avec la pièce dorée.

- La loi de A et de D est $\mathcal{G}(p)$.
- Soit B l'événement « le premier lancer amène au moins un pile ». $\mathbb{P}(\overline{B}) \stackrel{\text{indép.}}{=} q^2$, donc $\mathbb{P}(B) = 1 - q^2$.
- La loi de P est $\mathcal{G}(\mathbb{P}(B)) = \mathcal{G}(1 - q^2)$.
- $P = \min(A, D)$: on retrouve le même résultat.

Exercice 9 Maximum de deux variables géométriques

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

Soit $Z = \sup(X, Y)$.

Déterminer la loi de Z , vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$ et calculer son espérance.

Solution (Ex.9 – Maximum de deux variables géométriques)

Posons $q = 1 - p$.

• $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \stackrel{\text{indép.}}{=} \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)$$

or $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) = (1 - p)^k$ (les k premières expériences sont des échecs),

donc $\mathbb{P}(Z \leq k) = (1 - q^k)^2$ (y compris pour $k = 0$... remarque pour ce qui va suivre).

Enfin, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1) = (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2$

$$\mathbb{P}(Z = k) = 2q^{k-1} - 2q^k + q^{2k} - q^{2k-2} = 2pq^{k-1} - (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$$

• De $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $r \in]0; 1[$, on tire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k) = 2p \times \frac{1}{1-p} - (1 - q^2) \times \frac{1}{1 - q^2} = 1.$$

• De $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$ pour $r \in]0; 1[$ (obtenue par dérivation de la série géométrique), on tire :

$\mathbb{E}(Z)$ existe et

$$\mathbb{E}(Z) = 2p \times \frac{1}{p^2} - (1 - q^2) \times \frac{1}{(1 - q^2)^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2p - p^2} = \frac{3 - 2p}{p(2 - p)}.$$

Exercice 10 *Maximum de variables uniformes*

Soit $m \geq 2$. Soit $n \geq 2$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[[1; m]]$.

On note S_n la variable aléatoire égale à la plus grande des n variables X_i . Autrement dit

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_n(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i(\omega)).$$

- Dans le cas où $n = 2$, déterminer la loi de S_2 , ainsi que son espérance et sa variance.
- On revient au cas général où $n \geq 2$.
 - Déterminer $\mathbb{P}(S_n = m)$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{V}(S_n)$. Commenter.

4. Autour des variables indicatrices

Exercice 11 *Produit de Bernoulli - Corrélation*

- Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Que peut-on dire de X^2 ?
- Soit $p \in]0; 1[$. On effectue une suite de lancer d'une pièce amenant " pile " avec la probabilité p et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
 - X_k la variable indicatrice de l'événement « le k -ème lancer donne " pile " »,
 - Y_k la variable indicatrice de l'événement « les k -ème et $(k + 1)$ -ème lancers donnent tous les deux " pile " ».
 Pour tous k et j dans \mathbb{N}^* , calculer la covariance $\text{Cov}(Y_k, Y_j)$.

Solution (Ex.11 – Produit de Bernoulli - Corrélation)

- $X(\Omega) = \{0; 1\}$ donc X^2 ne peut prendre que les valeurs $0^2 = 0$ et 1^2 .
De plus : $(X = 0 \iff X^2 = 0)$ et $(X = 1 \iff X^2 = 1)$.
Donc finalement $X^2 = X$ (et en particulier $X^2 \sim \mathcal{B}(p)$)
- Soient k et j dans \mathbb{N}^* . On a $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$.
 - Si $j \neq k - 1$ et $j \neq k$ et $j \neq k + 1$, alors les variables X_k, X_{k+1}, X_j et X_{j+1} sont 4 variables distinctes indépendantes, donc $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $Y_j = X_j X_{j+1}$ sont indépendantes et leur covariance est nulle. Donc $\rho(Y_k, Y_j) = 0$.
 - Si $j = k$, alors $Y_j = Y_k$, $\text{Cov}(Y_k, Y_j) = \mathbb{V}(Y_k)$, $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sigma(Y_k)^2 = \mathbb{V}(Y_k)$, $\rho(Y_k, Y_j) = 1$. Ceci n'est pas surprenant puisqu'il y a un lien affine évident entre Y_k et Y_j : $Y_j = 1 \times Y_k + 0$...
 - Si $j = k + 1$, alors $Y_k Y_j = X_k X_{k+1}^2 X_{k+2} = X_k X_{k+1} X_{k+2}$.
Par indépendance, $\mathbb{E}(Y_k Y_j) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1} X_{k+2}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1})\mathbb{E}(X_{k+2}) = p^3$ et toujours par indépendance $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_{k+1}) = p^2$. Donc $\text{Cov}(Y_k, Y_j) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$.
Calculons $\mathbb{V}(Y_k)$. $Y_k(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 1)) = \mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}(X_{k+1} = 1)$ par indépendance, donc $\mathbb{P}(Y_k = 1) = p^2$ et $Y_k \sim \mathcal{B}(p^2)$.
Par conséquent, $\mathbb{V}(Y_k) = p^2(1 - p^2)$. Il en est de même pour Y_j : $Y_j \sim \mathcal{B}(p^2)$.
Alors $\sigma(Y_k)\sigma(Y_j) = \sqrt{p^2(1 - p^2)}\sqrt{p^2(1 - p^2)} = p^2(1 - p^2)$. Finalement $\rho(Y_k, Y_j) = \frac{p^3(1 - p)}{p^2(1 - p^2)} = \frac{p(1 - p)}{(1 - p)(1 + p)} = \frac{p}{1 + p}$.
 - Si $j = k - 1$, alors $k = j + 1$ et en permutant les rôles de k et j dans ce qui précède, on obtient encore $\rho(Y_k, Y_j) = \frac{p}{1 + p}$.

Exercice 12 *Étude de la loi hypergéométrique*

On considère une urne \mathcal{U} contenant N boules, de couleur bleue ou rouge. On note p la proportion de boules bleues dans l'urne et q la proportion de boules rouges, de sorte que

$$p, q \in [0; 1], \quad p + q = 1, \quad Np \in \llbracket 0; N \rrbracket, \quad Nq \in \llbracket 0; N \rrbracket \quad \text{et} \quad Np + Nq = N.$$

Soit $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$. On prélève dans l'urne **simultanément** ou, ce qui revient au même dans cette expérience, **successivement sans remise**, n boules dans \mathcal{U} et on note X le nombre de boules bleues ainsi prélevées.

1. a) Justifier que $X(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$, puis que

$$X(\Omega) = \llbracket \max(0, n - Nq); \min(n, Np) \rrbracket.$$

- b) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

- c) Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que, parmi ces tirages, il y en a exactement

$$\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}$$

contenant exactement k boules bleues.

Cette valeur est-elle valable lorsque $k > Np$? Et lorsque $k < n - Nq$?

2. Justifier que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N , n et p , et on note $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$.

3. En déduire la **formule de Van der Monde** :

$$\forall (b, r) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \sum_{k=0}^n \binom{b}{k} \binom{r}{n-k} = \binom{b+r}{n}.$$

On suppose de plus les boules bleues numérotées de 1 et Np . Pour tout $i \in \llbracket 1; Np \rrbracket$, on note B_i la variable indicatrice de l'événement :

« la boule bleue de numéro i a été tirée ».

4. a) Justifier que, pour tout $i \in \llbracket 1; Np \rrbracket$, B_i suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\frac{n}{N}.$$

- b) En déduire l'espérance de X .

5. a) Montrer que, pour tout i et j de $\llbracket 1; Np \rrbracket$ distincts, $B_i B_j$ suit une loi de Bernoulli, et préciser son paramètre.

- b) En déduire, pour tout i et j de $\llbracket 1; Np \rrbracket$ distincts, la covariance de B_i et B_j .

- c) En déduire la variance de X .

6. On considère deux variables U et V indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(u; p)$ et $\mathcal{B}(v; p)$. Soit $k \in \llbracket 0; u + v \rrbracket$.

Montrer par le calcul que la loi conditionnelle de U conditionnée par l'événement $[U + V = k]$ est hypergéométrique de paramètres $u + v$, k et $\frac{u}{u + v}$.

5. Avec des fonctions génératrices

Exercice 13 *Stabilité des lois binomiales et de Poisson*

1. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{B}(m, p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi de $X + Y$ à l'aide des fonctions génératrices.
2. Soit X et Y indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$ à l'aide des fonctions génératrices.

Exercice 14 *Binomiale et parité*

On dispose de $2n + 1$ jetons dont une face est noire et l'autre blanche. On lance simultanément ces jetons.

1. On note B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues. Quelle loi suivent les variables aléatoires B et N ?
2. a) Expliquer pourquoi une seule des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois.
b) X désigne la variable aléatoire égale à ce nombre impair. Calculer la loi de X .
3. a) Exprimer la fonction génératrice de X , notée G_X , à l'aide de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^{2n+1} - (1 - x)^{2n+1}$.
b) En déduire l'espérance et la variance de X .

Solution (Ex.14 – Binomiale et parité)

1. B et N suivent $\mathcal{B}(2n + 1, 1/2)$ (par définition de cette loi).
2. a) En notant B et N respectivement le nombre de faces blanches et noires obtenues, $B + N = 2n + 1$ est impair, ce qui est impossible si B et N sont tous les deux pairs, ou tous les deux impairs. Donc un, et un seul, des deux nombres B et N est impair.
b) • $X(\Omega) = \{2k + 1, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.
• Pour tout k de $\llbracket 0; n \rrbracket$, $[X = 2k + 1] = [B = 2k + 1] \cup [N = 2k + 1]$, cette réunion étant disjointe.

Par additivité :

$$\mathbb{P}(X = 2k + 1) = 2 \times \binom{2n+1}{2k+1} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{2^{2n+1-2k-1}} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n+1}{2k+1}$$

3. a) Par la formule du binôme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k x^k = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

$$\text{Donc } G_X(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} f(x).$$

- b) $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2^{2n+1}} f'(1) = \frac{(2n+1)2^{2n}}{2^{2n+1}} = \frac{2n+1}{2}$.

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1) = \frac{(2n+1)2n}{4},$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2) = \frac{2n(2n+1) + 4n + 2 - (2n+1)^2}{4} = \frac{2n+1}{4}.$$

Exercice 15 Loi de Pascal - III

Soit $p \in]0; 1[$. Soit (T_n) une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi

$$\text{géométrique } \mathcal{G}(p). \text{ On pose, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n T_k \quad (\mathcal{R})$$

- Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction génératrice de S_n , et en déduire sa loi.
Indication : que donne la n-ième dérivée de la série géométrique ?
- Déterminer l'espérance et la variance de S_n
 - en exploitant la relation (\mathcal{R}) ;
 - en exploitant sa fonction génératrice.

Solution (Ex.15 - Loi de Pascal - III)

- Par indépendance des T_k , $G_{S_n} = \prod_{k=1}^n G_{T_k}$.

$$\text{Or pour tout } k, G_{T_k} : t \mapsto \frac{pt}{1-qt}, \text{ donc } G_{S_n} : t \mapsto p^n t^n \frac{1}{(1-qt)^n}.$$

Saisissons-nous de l'indication, pour x tel que $|x| < 1$:

$$\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ d'une part,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{1-x} \right) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (k+1) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} x^k \text{ d'autre part.} \end{aligned}$$

On en tire : $\forall t \in [0; 1]$,

$$\frac{1}{(1-qt)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!} (qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} q^k t^k.$$

$$\text{D'où : } G_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} q^k p^n t^{k+n} = \sum_{j=n}^{+\infty} \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n t^j.$$

On en déduit :

$$\bullet S_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \llbracket,$$

$$\bullet \forall j \geq n, \mathbb{P}(S_n = j) = \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n.$$

Ceci s'interprète facilement : S_n est le rang d'apparition du n -ième succès dans un schéma de Bernoulli. Donc $S_n(\Omega) = \llbracket n, +\infty \llbracket$. De plus, les suites d'épreuves favorables à $[S_n = j]$ sont les suites de j lancers dont n succès avec le dernier à la fin, $j-n$ échecs, à placer parmi les $j-1$ épreuves de rang 1 à $j-1$. Cela fait $\binom{j-1}{j-n}$ suites possibles, deux à deux incompatibles et toutes de probabilité

$p^n q^{j-n}$. Donc $\mathbb{P}(S_n = j) = \binom{j-1}{j-n} q^{j-n} p^n \dots$ ce qui en fait redémontrer le résultat précédent.

- Sachant $[S_2 = k]$, T_1 prend ses valeurs dans $\llbracket 1; k-1 \llbracket$. Soit $i \in \llbracket 1; k-1 \llbracket$.

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}([S_2 = k] \cap [T_1 = i])}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{\mathbb{P}([T_2 = k-i] \cap [T_1 = i])}{\mathbb{P}(S_2 = k)}$$

Or T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}_{[S_2=k]}(T_1 = i) = \frac{\mathbb{P}(T_2 = k-i) \mathbb{P}(T_1 = i)}{\mathbb{P}(S_2 = k)} = \frac{pq^{k-i-1} pq^{i-1}}{\binom{k-1}{k-2} q^{k-2} p^2} = \frac{1}{k-1}$$

La seule question est de savoir où a eu lieu le premier des 2 succès, et la moralité est que ça ne dépend plus de la probabilité de succès, mais est parfaitement uniforme : la loi de T_1 conditionnée par $[S_2 = k]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; k-1 \llbracket$.

- $\mathbb{E}(S_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k) = \frac{n}{p}$.

6. Autour de l'espérance par antirépartition**Exercice 16** Large sera la chute !

On tire indéfiniment au hasard et avec remise des jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n . On note $(u_i)_{i \geq 1}$ la suite infinie des numéros obtenus. On s'intéresse au temps T_n d'attente de la première chute large définie précisément par

$$[T_n = k] \text{ signifie que : } u_1 < u_2 < \dots < u_{k-1} \geq u_k$$

- Préciser $T_n(\Omega)$ et déterminer pour tout k de \mathbb{N} la probabilité $\mathbb{P}(T_n > k)$.
- En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de T_n .
- a) Montrer que, pour toute variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$\mathbb{E} \left(\frac{X(X-1)}{2} \right) < +\infty \text{ si, et seulement si, } \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X > k) \text{ converge.}$$

- b) Qu'en déduire en cas de convergence de la série précédente ?

4. En déduire l'existence et la valeur de la variance de T_n .

Solution (Ex.16 – *Large sera la chute!*)

1. $T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Jusqu'au rang k inclus, il y a n^k tirages possibles. Les tirages favorables à $[T_n > k]$ sont les k -listes (u_1, \dots, u_k) strictement croissantes. Une telle liste se construit en choisissant k jetons distincts et en les plaçant nécessairement

en ordre croissant. Il y a donc $\binom{n}{k}$ cas favorables. Donc $\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

On observe enfin que cette formule est encore valable pour $k \in \{0, 1\}$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 1$, et pour $k \geq n+1$ pour lequel $\mathbb{P}(T > k) = 0$.

2. Comme $T_n(\Omega)$ est fini, T_n admet une espérance finie.

Comme $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \stackrel{\text{Newton}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \right) = \sum_{0 \leq k < i} k \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} k \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X = i) \sum_{k=0}^{i-1} k \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \frac{i(i-1)}{2} \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{X(X-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Les termes étant tous positifs, la finitude d'une des sommes entraîne celle des autres.

b) En cas de convergence, $\mathbb{E} \left(\frac{X(X-1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X > k)$.

4. Comme seuls $n-1$ termes sont non nuls, la série converge et

$$\mathbb{E} \left(\frac{T_n(T_n-1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n^k} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{n^j}$$

$$\mathbb{E} \left(\frac{T_n(T_n-1)}{2} \right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Par linéarité, $\mathbb{E} \left(\frac{T_n(T_n-1)}{2} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n))$ d'où

$$\mathbb{V}(T_n) = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$\mathbb{V}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(3 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

7. Un exemple d'étude de couple et de transfert par double somme

Exercice 17 *Minimum et maximum de deux uniformes : l'art des sommations finies*

Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On tire successivement et avec remise des boules dans une urne contenant exactement n boules numérotées de 1 à n et on note X et Y les numéros des deux premières boules obtenues.

1. Justifier que $\Omega = \llbracket 1; n \rrbracket^2$ est un univers susceptible de modéliser l'expérience.
2. Donner la loi suivie par X et Y .
On note I et S les variables aléatoires respectivement égales à $\inf(X, Y)$ et $\sup(X, Y)$.
3. Dans cette question, on se propose de déterminer l'espérance, la variance et la covariance de I et S sans utiliser la loi du couple (I, S) .
 - a) Que vaut, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(I > k)$?
 - b) En déduire $\mathbb{E}(I)$, puis $\mathbb{E}(S)$ (au fait, que vaut $I + S$?)
 - c) Montrer que, pour toute variable aléatoire Z telle que $Z(\Omega) \subset \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{E} \left(\frac{Z(Z-1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z > k).$$

- d) En déduire $\mathbb{V}(I)$.
- e) Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que

$$f : [S = k] \mapsto [I = n + 1 - k], \omega = (x, y) \mapsto (n + 1 - x, n + 1 - y)$$

est une bijection. *Indication : on pourra vérifier que les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents et calculer $f \circ f$.*

- f) En déduire une égalité de probabilités et montrer que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(I)$.
- g) Calculer $\text{Cov}(I, S)$.
4. Dans cette question, on s'appuie sur la loi du couple (I, S) .
 - a) Déterminer la loi de (I, S) .
 - b) En déduire la loi, l'espérance et la variance de I .
 - c) Déterminer $\text{Cov}(I, S)$.
 - d) En déduire la variance de S , sans chercher à déterminer sa loi.

Exercice 18 Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.

On effectue une succession de lancers indépendants avec une pièce donnant « pile » avec la probabilité $p \in]0; 1[$ et « face » avec la probabilité $q = 1 - p$.

On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$ -ème l'autre.

On définit de manière analogue la longueur L_2 de la 2-ème série.

Par exemple, si les premiers lancers donnent *pile-pile-face-pile-...* alors $L_1 = 2$ et $L_2 = 1$ tandis que si les premiers lancers donnent *face-pile-pile-...* alors $L_1 = 1$ et $L_2 \geq 2$ mais on ne connaît pas encore la valeur exacte de L_2 .

1. Calculs préliminaires -

Pour $r \in]0; 1[$, que valent $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k$?

2. a) Déterminer la loi de L_1 , son espérance et sa variance.

b) Pour quelle valeur de p $\mathbb{E}(L_1)$ est-elle minimale ? Et maximale ?

3. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2 , son espérance et sa variance.4. a) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

b) Dans ce cas, quelle loi usuelle suivent L_1 et L_2 ?

5. a) Calculer par transfert $\mathbb{E}(L_1L_2)$.

b) En déduire $\text{Cov}(L_1, L_2)$.

6. a) Déterminer la loi de $L_1 + L_2$.

b) En déduire $\mathbb{E}(L_1 + L_2)$ et vérifier que $\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(L_2)$.

c) Calculer $\mathbb{V}(L_1 + L_2)$ et en retrouver $\text{Cov}(L_1, L_2)$.

7. a) Calculer finalement $\rho(L_1, L_2)$.

b) Pour quelle valeur de p s'annule-t-il ?

c) Son signe était-il prévisible ?

Solution (Ex.18 - Longueurs de séries : l'art des sommations géométriques.)

1. Calculs préliminaires - Version analytique

Par dérivation terme à terme de la série géométrique de rayon de convergence

$R = 1$, pour tout $r \in]0; 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$, $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)r^{k-2} = \frac{2}{(1-r)^3}$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k = \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1) + k)r^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$$

Calculs préliminaires - Version probabiliste

Comme $r \in]0; 1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r)$ est l'espérance de la loi géométrique de

paramètre $1-r$: $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^{k-1}(1-r) = \frac{1}{1-r}$, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} kr^k = \frac{r}{(1-r)^2}$.

De même, $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^{k-1}(1-r) = \mathbb{E}(X^2)$ si X suit la loi $\mathcal{G}(1-r)$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^{k-1}(1-r) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{r}{(1-r)^2} + \frac{1}{(1-r)^2} = \frac{r+1}{(1-r)^2}$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k^2r^k = \frac{r(r+1)}{(1-r)^3}$.

Pour alléger les écritures, je note par exemple $P_1P_2F_3P_4$ l'événement « les 4 premiers lancers donnent pile, puis pile, puis face, puis pile ». Cet événement a pour probabilité p^3q par indépendance mutuelle des lancers.

2. a) • $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_1, F_1) donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = k) &= \mathbb{P}(P_1 \cap [L_1 = k]) + \mathbb{P}(F_1 \cap [L_1 = k]) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \dots P_k F_{k+1}) + \mathbb{P}(F_1 \dots F_k P_{k+1}) \\ &= p^k q + p q^k \end{aligned}$$

On vérifie sans peine par la série géométrique que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_1 = k]) = \frac{pq}{(1-p)} + \frac{pq}{(1-q)} = p + q = 1$$

donc L_1 est parfaitement définie car l'événement « la première série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers » est presque-certain.

• Par les calculs préliminaires, L_1 possède une espérance et une variance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_1) &= \frac{pq}{q^2} + \frac{pq}{p^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{pq} \\ &= \frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{1}{pq} - 2. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(L_1^2) = \frac{qp(p+1)}{q^3} + \frac{pq(q+1)}{p^3} = \frac{p(p+1)}{q^2} + \frac{q(q+1)}{p^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(L_1) &= \frac{p^3(p+1) + q^3(q+1) - (p^4 + 2p^2q^2 + q^4)}{p^2q^2} \\ &= \frac{p^2q^2}{p^2q^2} = \frac{p^3 + q^3}{p^2q^2} - 2. \end{aligned}$$

b) $\mathbb{E}(L_1) = \frac{1}{pq} - 2$ or $pq = p(1-p) = -p^2 + p = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ donc $0 < pq \leq \frac{1}{4}$

avec $pq \xrightarrow{p \rightarrow 0} +0$ et $pq = \frac{1}{4}$ si, et seulement si, $p = q = \frac{1}{2}$.

On en déduit que, pour $p \in]0; 1[$, $\frac{1}{pq}$ est minoré par 4, atteint en $p = 1/2$ uniquement, et n'est pas majorée.

D'où $\mathbb{E}(L_1)$ est minimale pour $p = 1/2$ et vaut alors 2, et n'est pas majorée car $\mathbb{E}(L_1) \xrightarrow{p \rightarrow 0 \text{ ou } 1} +\infty$: pas de valeur maximale.

3. • $(L_1, L_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et, pour tout $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (P_1, F_1) ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) &= \mathbb{P}(P_1 \cap [L_1 = j] \cap [L_2 = k]) + \mathbb{P}(F_1 \cap [L_1 = j] \cap [L_2 = k]) \\ &= \mathbb{P}(P_1 \dots P_j F_{j+1} \dots F_{j+k} P_{j+k+1}) + \\ &\mathbb{P}(F_1 \dots F_j P_{j+1} \dots P_{j+k} F_{j+k+1}) \\ &= p^{j+1} q^k + p^k q^{j+1} \end{aligned}$$

• Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([L_1 = j])_{j \in \mathbb{N}^*}$,

$$\mathbb{P}(L_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) = \frac{p^2 q^k}{1-p} + \frac{p^k q^2}{1-q} = p^2 q^{k-1} + p^{k-1} q^2$$

☞ On vérifie sans peine par la série géométrique que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([L_2 = k]) = \frac{p^2}{(1-q)} + \frac{q^2}{(1-p)} = p + q = 1$$

donc L_2 est parfaitement définie car l'événement « la deuxième série s'arrête au bout d'un nombre fini de lancers » est presque-certain.

• Par les calculs préliminaires, $\mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_2)$ existent et

$$\mathbb{E}(L_2) = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = 1 + 1 = 2$$

☞ Chose surprenante *a priori*, $\mathbb{E}(L_2)$ ne dépend pas de p et q . Une explication ?

$$\mathbb{E}(L_2^2) = \frac{p^2 q(1+q)}{q(1-q)^3} + \frac{q^2 p(1+p)}{p(1-p)^3} = \frac{1+q}{p} + \frac{1+p}{q} = \frac{p^2 + q^2 + 1}{pq}$$

$$\mathbb{V}(L_2) = \frac{p^2 + q^2 + 1}{pq} - 4 = \frac{p^2 + q^2 - 4pq + 1}{pq}$$

4. • On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = 1, L_2 = 1) &= \mathbb{P}(L_1 = 1)\mathbb{P}(L_2 = 1) \iff p^2 q + p q^2 = (2pq)(p^2 + q^2) \iff 1 = 2p^2 + 2q^2 \\ 2p^2 + 2q^2 &\iff 1 = 4p^2 - 4p + 2 \iff p^2 - p + \frac{1}{4} = 0 \iff (p - \frac{1}{2})^2 = 0 \iff p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc si L_1 et L_2 sont indépendantes, alors $p = \frac{1}{2} = q$.

• Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, alors pour tout $(j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\mathbb{P}(L_1 = j, L_2 = k) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k} \text{ et}$$

$$\mathbb{P}([L_1 = j] \cap [L_2 = k]) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \times 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}$$

donc L_1 et L_2 sont indépendantes.

L_1 et L_2 sont indépendantes si, et seulement si, $p = q = 1/2$.

☞ On peut observer que, dans ce cas, L_1 et L_2 suivent toutes les deux des lois géométriques de paramètre $1/2$.

5. a) Déterminer la loi de $L_1 + L_2$.

• $(L_1 + L_2)(\Omega) = [2, +\infty[$

• Pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} ([L_1 = k] \cap [L_2 = n - k])\right), \text{ et par incompatibilité} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(L_1 = k, L_2 = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (p^{k+1} q^{n-k} + p^{n-k} q^{k+1}) \end{aligned}$$

Or pour $p \neq 1/2$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} p^{k+1} q^{n-k}}{q^{n-1} - p^{n-1}} = p^2 q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^k = p^2 q^{n-1} \frac{1 - (p/q)^{n-1}}{1 - p/q} = \frac{p^2 q^n}{q - p} \times$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} p^{k+1} q^{n-k} = \frac{p^2 q}{q - p} (q^{n-1} - p^{n-1}), \text{ et par symétrie de } p \text{ et } q,$$

$$\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = \frac{p^2 q}{q - p} (q^{n-1} - p^{n-1}) + \frac{q^2 p}{p - q} (p^{n-1} - q^{n-1})$$

$$\text{Or } \frac{p^2 q}{q - p} - \frac{q^2 p}{p - q} = \frac{p^2 q + q^2 p}{q - p} = \frac{pq}{q - p}, \text{ donc}$$

$$\mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = \frac{p}{q - p} q^n + \frac{q}{p - q} p^n$$

$$\text{Pour } p = 1/2, \mathbb{P}(L_1 + L_2 = n) = (n - 1) \frac{1}{2^n}$$

b) Petit calcul préliminaire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{p^2} - q = \frac{q(1-p^2)}{p^2} = \frac{q(1-p)(1+p)}{p^2} = \frac{q^2(1+p)}{p^2}$$

Alors pour $p \neq 1/2$

$$\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \frac{1}{q-p} \left(\frac{q^2(1+p)}{p} - \frac{p^2(1+q)}{q} \right) = \frac{1}{q-p} \times \frac{1}{pq} (q^3 + pq^3 - p^3 - p^3q)$$

$$q^3 + pq^3 - p^3 - p^3q = (q-p)(q^2 + pq + p^2 + pq(p+q)) = (q-p)(p+q)^2 = q-p$$

Donc $\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \frac{1}{pq} = \dots = \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(L_2)$ effectivement.

Et si $p = 1/2$

$$\mathbb{E}(L_1 + L_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{1}{2^n} = \frac{2}{(1/2)^3} = 4 = \frac{1}{pq} \dots \text{ la formule précédente}$$

demeure.