Une matrice symétrique réelle S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T S X \geqslant 0,$$

et **positive et définie** si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T S X \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left(X^T S X = 0 \Longrightarrow X = 0\right).$$

L'ensemble des matrices symétriques réelles positives (respectivement positives et définies) se note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

On appelle **forme quadratique** (ou polynôme homogène de degré 2) toute fonction

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} b_{i,j} x_i x_j.$$

Une forme quadratique f sur $\mathbb{R}^n$ est dite **positive** si

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad f(u) \geqslant 0,$$

et **positive et définie** si

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad f(u) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \left(f(u) = 0 \Longrightarrow u = 0\right).$$

Un calcul préliminaire essentiel – à savoir retrouver !

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad X^T M Y = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} x_i y_j.$$

Exercice 1 *Comment fabriquer des produits scalaires ?*
Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = \left(E_1, \ldots, E_n\right)$ la base canonique de E.

1. Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la forme

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto X^T S Y$$

est un produit scalaire.

2. Soit $\left(. \mid .\right)$ un produit scalaire sur E de norme euclidienne associée N, et $S = \left(\left(E_i \mid E_j\right)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **a)** Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- **b)** Soit X et Y dans E. Exprimer $\left(X \mid Y\right)$ à l'aide de S.
- **c)** Que vaut S lorsque $\left(. \mid .\right)$ est le produit scalaire canonique ?

3. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A$.
- **a)** Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- **b)** On suppose de plus que A est inversible. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 *Lien avec les valeurs propres et l'inversibilité*
Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Que sait-on des valeurs propres de S ?
Soit $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^T S P$ est diagonale.

2. Vérifier que $X^T S X = Y^T D Y$ où $Y = P^T X$.

3. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subset [\,0\,;\ +\infty[$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Sp(S) pour que S soit dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

5. Justifier que

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 3 *Exemples de formes quadratiques en dimension 3*
On définit sur $E = \mathbb{R}^3$ les trois formes quadratiques

$$q_i(x, y, z) = 2x^2 + 2z^2 + iy^2 - 2xy - 2yz \quad \text{où} \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

1. En utilisant des identités remarquables, montrer que
- **a)** q_2 est positive et définie,
- **b)** q_1 est positive mais pas définie,
- **c)** q_0 n'est pas positive.

2. On note $X = \left(xyz\right)^T$.
- **a)** Montrer que, pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, il existe une matrice symétrique S_i telle que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad q_i(X^T) = X^T S_i X.$$

b) Quel lien y a-t-il entre la nature (positive et/ou définie) de la forme quadratique q_i et la nature de la matrice S_i ?

c) Calculer $\det(\mathrm{S}_0)$ et en déduire la nature de q_0.

d) Pour $i \in \{1, 2\}$, peut-on déduire la nature de S_i à l'aide de son déterminant ?

e) Pour $i \in \{1, 2\}$, étudier la nature de S_i et en déduire celle de q_i.

Exercice 4 *Matrices de Hilbert*

Soit $n \geqslant 2$ et H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$[\mathrm{H}_n]_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

1. Justifier que H_2 est définie et positive à l'aide de sa trace et de son déterminant.

2. Soit $\mathrm{X} = \left(x_1 \vdots x_n\right)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) En observant que $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\mathrm{d}t$, montrer que

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}_n\mathrm{X} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que H_n est définie et positive.

Exercice 5 *Théorème des moindres carrés*

Dans les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on utilisera le produit scalaire canonique et la norme euclidienne associée.

1. *Un exemple*

a) Placer les points $\mathrm{M}_1 = (x_1, y_1) = (1, 2)$, $\mathrm{M}_2 = (x_2, y_2) = (2, 3)$ et $\mathrm{M}_3 = (x_3, y_3) = (0, -2)$ dans un repère orthonormé.
On cherche la droite $\mathrm{D} : y = ax + b$ dite *de régression au sens des moindres carrés en y* telle que

$$\sum_{i=1}^{3} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

soit minimale.

b) En notant $\mathrm{X} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{Y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{U} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, montrer que ce problème se ramène à la recherche de $\displaystyle\min_{\mathrm{Z}\in\mathrm{Vect}(\mathrm{U},\mathrm{X})} ||\mathrm{Y} - \mathrm{Z}||^2$ et en déduire que ce problème possède une unique solution.

c) Déterminer D.

2. *Théorème des moindres carrés*

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p$. Montrer que :

a) $\displaystyle\min_{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||\mathrm{AX} - \mathrm{B}||$ existe,

b) $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$,

c) le système

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$$

d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ admet une et une seule solution,

d) en introduisant le sous-espace $\mathrm{F} = \left\{\mathrm{AX}, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p\right)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ où les C_i désignent les colonnes de A, $\displaystyle\min_{\mathrm{X}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} ||\mathrm{AX} - \mathrm{B}||$ est atteint si, et seulement si, X est l'unique solution du système

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}.$$

3. Résoudre l'exemple de la première question à l'aide du théorème de la seconde question.

4. Déterminer $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$

a) par projection orthogonale en introduisant un produit scalaire adapté à cette situation,

b) en cherchant le minimum de la fonction

$$(a, b) \longmapsto \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t.$$