Dans toute cette fiche, H_n désigne le n-ième nombre harmonique défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Il s'agit donc de la n-ième somme partielle de la série harmonique.
La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ s'appelle *série harmonique alternée.* On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

De plus, on admet l'existence et la valeur de la somme suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette dernière somme a été calculée pour la première fois par Leonhard Euler en 1735. Le problème du calcul de cette somme avait été posé par Pietro Mengoli en 1644. Étudié entre autres par Jacob Bernoulli dans les années 1680, il a résisté près d'un siècle. Il est connu sous le nom de *problème de Mengoli* ou *problème de Bâle* (Bernoulli et Euler sont nés à Bâle).

Les exercices suivants n'exigent aucune connaissance de seconde année.
À tout moment, on pourra utiliser la réponse à un exercice **précédent**.

Exercice 1 *Divergence de la série harmonique*

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{H}_n$.

Exercice 2 *Constante γ d'Euler par les suites adjacentes*

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.

1. Montrer que les suites u et v convergent.

2. En déduire l'existence d'une constante γ telle que

$$\mathrm{H}_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. Donner un équivalent de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Leonhard Euler n'a pas découvert l'existence de cette constante, qui était déjà connue de Pietro Mengoli (cf. exercice suivant), mais il en a calculé les seize premières décimales en 1782 et l'a baptisée « γ » :

$$\gamma \simeq 0,577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 8\ldots$$

Exercice 3 *Deux démonstrations historiques*

On doit à Nicolas Oresme la première démonstration de la divergence de la série harmonique, parue dans *Questiones super geometriam Euclidis* (1360) et à Pietro Mengoli le premier calcul de la somme de la série harmonique alternée, en 1650, dans *Novæ quadraturæ arithmeticæ, seu de additione fractionum.* Voici leurs démarches.

1. Oresme regroupe les termes par groupes de 2^n termes :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \mathrm{G}_0 + \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots$$

où $\mathrm{G}_n = \dfrac{1}{2^n + 1} + \dfrac{1}{2^n + 2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n + 2^n - 1} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
Montrer que $\mathrm{H}_{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$ pour tout n et conclure.

2. Mengoli exprime A_{2n} à l'aide de H_n et H_{2n} et conclut quant à la convergence et la somme de la série harmonique alternée.
À vous de l'imiter !

Qui est qui ?

Exercice 4 *Convergences et sommes*

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminer sa somme.

2. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et déterminer sa somme.

3. Justifier la convergence et déterminer la somme de la série de terme général

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3-n}.$$

4. Soit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

a) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n+1}$.

b) En déduire que, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} u_n = 2H_N - 2H_{2N+1} + 2$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 5 *Pairs et impairs*

1. Justifier la convergence des séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}.$$

2. Calculer les sommes des séries précédentes.

Exercice 6 *Autour du logarithme*

1. Existence et valeur éventuelle de $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

2. Même question pour $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.