Exercice 1 *Natures des séries de terme général u_n ...*

1. $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \geq 0)$

2. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \quad (n \geq 1)$

3. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \quad (n \geq 0)$

4. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1} \quad (n \geq 1)$

5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \quad (n \geq 2)$

6. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}} \quad (n \geq 0,\ a \in \mathbb{R})$

Solution (**Ex.1** – *Natures des séries de terme général u_n ...*)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$ car $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Par le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. $n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(1/n^2\right)$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\dfrac{1}{n}+\mathcal{O}\left(1/n^2\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$: la série diverge.

3. $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à la série de Riemann de paramètre 2.

4. $u_n = \sin\left(\pi\dfrac{(n+1)^2-2(n+1)+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1)+\dfrac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$: on conclut à la convergence grâce au critère spécial des séries alternées.

5. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$

$\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème spécial de séries alternées,

$\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente,

$\sum \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ est une série absolument convergente donc convergente, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$,

donc $\sum u_n$ diverge.

6. • Si $|a|<1$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a|^n$, or $\sum |a|^n$ est une série géométrique convergente.
Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
• Si $a=1$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ et si $a=-1$, $u_{2n}=1/2$ et $u_{2n+1}=-1/2$: dans le deux cas, $\sum u_n$ diverge grossièrement.
• Si $|a|>1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$, or $\sum \left|\dfrac{1}{a}\right|^n$ est une série géometrique convergente.
Par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 *Un peu tous les critères*

On pose, pour tout $n \geqslant 2$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)},\ v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n} \text{ et } w_n = \frac{1}{\ln^2(n)}.$$

1. a) Montrer que $\dfrac{1}{n} = o\left(w_n\right)$.

b) Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?

2. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

3. a) Montrer que la suite $\big(|v_n|\big)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

b) Déterminer un équivalent simple de $v_n - u_n$.

c) En déduire la nature de la série de terme général v_n.

Solution (**Ex.2** – *Un peu tous les critères*)

1. a) Par croissances comparées, $\dfrac{\ln^2(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2(n)}\right)$.

b) Comme la série harmonique de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, par négligeabilité la série de terme général w_n diverge.

2. Comme $\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle, le théorème de Leibniz assure que la série de terme général u_n converge.

3. a) Pour $n \geqslant 3$, $\ln(n)+(-1)^n > 0$ et $|v_n| = \dfrac{1}{\ln(n)+(-1)^n}$.

$\ln(n+1)+(-1)^{n+1}-\ln(n)-(-1)^n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+2(-1)^{n+1}$ est du signe de $2(-1)^{n+1}$ car $1 < 1+\dfrac{1}{n} \leqslant 2 < \mathrm{e}$ donc $0 < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 1 < 2$.

Donc la suite $\big(\ln(n)+(-1)^n\big)$ n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang, donc la suite $(|v_n|$ n'est pas monotone non plus, même à partir d'un certain rang.

b) $v_n - u_n = \dfrac{-1}{\ln^2(n) + (-1)^n \ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -w_n$.

c) Le théorème de Leibniz ne s'applique pas au terme général v_n $((|v_n|)$ non décroissante).

On déduit par équivalence de termes négatifs que $\sum_n (v_n - u_n)$ diverge. Comme $\sum_n u_n$ converge, $\sum_n v_n$ diverge, sinon $\sum_n (v_n - u_n)$ convergerait par linéarité.

Exercice 3 *Natures en série*

Soit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(1+u_n)$.
3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(u_n)$.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $\cos(u_n)$.

Solution (**Ex.3** – *Natures en série*)

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite décroissante de limite nulle donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge par le critère des séries alternées.
2. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+u_n) = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n - \dfrac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

   Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. De plus la série harmonique $\sum_n \dfrac{1}{2n}$ diverge.

   Donc $\sum_n \ln(1+u_n)$ diverge.
3. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sin(u_n) = u_n + \mathcal{O}\left(u_n^3\right) = u_n + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

   Or $\sum_n u_n$ par 1., et $\sum_n \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ convergent car la série de Riemann de paramètre $3/2 > 1$ converge. Donc par linéarité $\sum_n \ln(1+u_n)$ converge.
4. Comme $\cos(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$, $\sum_n \cos(u_n)$ diverge grossièrement.

Exercice 4 *Fonction ζ de Riemann en 1*

Pour tout $\alpha > 1$ on pose

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{\alpha\to 1^+} \zeta(\alpha)$.
2. Donner un équivalent de ζ en 1.

Solution (**Ex.4** – *Fonction ζ de Riemann en 1*)

1. Par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$.

   Donc : $\dfrac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$.
   Par comparaison, $\lim_{\alpha\to 1^+} \zeta(\alpha) = +\infty$.
   La majoration n'était pas nécessaire mais sera utile pour la suite.
2. Et : $\forall \alpha > 1, 1 \leq \dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \leq (\alpha-1)+1$, donc par encadrement : $\dfrac{\zeta(\alpha)}{1/(\alpha-1)} \xrightarrow[\alpha\to 1]{} 1$, et

$$\zeta(\alpha) \underset{\alpha\to 1}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 5 *Exemples de Séries de Bertrand*

Soit $\alpha \in \left]0\,;\,+\infty\right[$.

1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$.
2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln n}$.

Solution (**Ex.5** – *Exemples de Séries de Bertrand*)

1. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln^\alpha t}$ est continue positive et décroissante sur $\left[2\,;\,+\infty\right[$ donc $\sum_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

• Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

• Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(t)}\right]_2^x$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(x)} - \frac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1}(2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{(\alpha-1)\ln^{\alpha-1}(2)} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

• Bilan : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2. $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \ln t}$ est continue positive et décroissante sur $[\,2\,;\,+\infty[$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ est de même nature que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

• si $\alpha > 1$, $f_\alpha(t) = o(1/t^\alpha)$ et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable ... $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

• si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_2^x f_1(t)\mathrm{d}t = [\ln|\ln(t)|]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ... $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

• si $\alpha < 1$, $f_\alpha(t) \geq f_1(t) \geq 0$ car $t^\alpha \leq t$, or $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t$ diverge d'après le point précédent donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\mathrm{d}t$ diverge ... $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge.

Exercice 6 *Comparaison de sommes et d'intégrales*

Pour $x \in]\,0\,;\,+\infty[$, on pose : $\forall n \geq 1, \quad u_n(x) = \dfrac{1}{n(n+x)}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

Dans la suite, on pose, pour $x \in]\,0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Soit $x \in]\,0\,;\,+\infty[$ et $f : [\,1\,;\,+\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1}{t(t+x)}$.

a) Montrer que f est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty[$.

b) Justifier que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \mathrm{S}(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire un encadrement explicite (i.e. sans intégrale) de $\mathrm{S}(x)$.

3. En déduire un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Solution (**Ex.6** – *Comparaison de sommes et d'intégrales*)

1. $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ (ou "$\leq$", ou "O"...) permet de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge.

2. a) $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure que f est intégrable sur $[\,1\,;\,+\infty[$.

b) Il s'agit d'une comparaison série/intégrale, possible par la décroissance de f.

On prouve d'abord $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq u_n(x) \leq \int_{n-1}^n f(t)\mathrm{d}t$.

On somme la partie gauche pour n de 1 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \mathrm{S}(x)$.

On somme la partie droite pour n de 2 à $+\infty$ (les convergences ont déjà été prouvées) : $\mathrm{S}(x) - u_1(x) \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Et comme $u_1(x) = f(1)$, on obtient le résultat voulu.

c) On peut décomposer : $\dfrac{1}{t(t+x)} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}\right)$.

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ln t - \ln(t+x)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}\left[\ln\frac{t}{t+x}\right]_1^{+\infty} = \frac{ln(1+x)}{x}.$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \leq \mathrm{S}(x) \leq \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3. On vérifie sans peine que $\dfrac{1}{1+x} = o\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

On pense alors que $\mathrm{S}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ce que l'on prouve en divisant l'encadrement précédent :

$1 \leq \dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \leq \dfrac{x}{(1+x)\ln(1+x)} + 1$. Le majorant tend vers 1 : les gendarmes assurent $\dfrac{x\mathrm{S}(x)}{\ln(1+x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$...

Exercice 7 *Convergence*

Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Solution (**Ex.7** – *Convergence*)
$\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$ par le théorème des séries alternées, et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge par domination, puisque la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ converge.
Donc la série initiale converge par linéarité.

Exercice 8 *Convergence*

Soit $\forall n \geq 0, \quad u_n = \sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}} - 1$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Solution (**Ex.8** – *Convergence*)
$\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(u_n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{n+1}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{-1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
Par équivalence de suites positives et Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 9 *Série à paramètre*

Soit $a \neq 0$ et $\forall n \geq 1, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^{n+1}}$.

Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Solution (**Ex.9** – *Série à paramètre*)
- Si $a < 0$, $n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^a + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: divergence grossière.
- Supposons $a > 0$.

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(\dfrac{1}{1-(-1)^n/n^a}\right) = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^a}+o\left(\dfrac{1}{n^a}\right)\right)$
$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} + \dfrac{1}{n^{2a}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2a}}\right) = v_n + w_n + o(w_n)$
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge par le théorème de Leibniz, $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^a}\right)$ étant décroissante de limite nulle.
$u_n - v_n = w_n + o(w_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ qui est positive.
Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n - v_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$ par équivalence et par les séries de Riemann.
Comme $u_n = (u_n - v_n) + v_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ssi $a > \dfrac{1}{2}$.
Par équivalence de suites positives et Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.