Solution (**Ex.1** – *Études de convergence de séries*)

1. $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $n\ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc $n\ln(1+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par continuité de l'exponentielle en 1, $\exp(n\ln(1+1/n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(1)$ donc $(1+1/n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}$.

2. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (1+1/n)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}$. Comme la série géométrique de raison $1/2$ converge car $1/2 \in \,]-1\,;\,1[$, par équivalence de termes généraux positifs, $\sum u_n$ converge.

3. a) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}a$

b) Comme $\left|\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}a$, le critère de D'alemebert assure que la série de terme général v_n converge si $\mathrm{e}a < 1$ i.e. $a < \mathrm{e}^{-1}$ et diverge si $\mathrm{e}a > 1$ i.e. si $a > \mathrm{e}^{-1}$.
Si $a = \mathrm{e}^{-1}$, alors $v_n = \dfrac{n!\mathrm{e}^{-n}}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}$ d'après la formule de Stirling. Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série de terme général v_n diverge grossièrement.
<u>Conclusion :</u> la série de terme général v_n converge si, et seulement si, $a < \mathrm{e}^{-1}$.

4. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(n+1-\ln(n+1)) - (n-\ln(n)) = 1 - \ln(1+1/n) > 0$ car $\ln(1+1/n) \leqslant \ln 2 < 1$ donc $n+1-\ln(n+1) > n - \ln(n)$ donc $w_{n+1} < w_n$ et la suite $(|w_n|)$ décroît.
Et $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\ln n \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} o(n)$ donc la suite $(|w_n|)$ tend vers 0.
Le théorème des séries alternées s'applique et assure que la série de terme général $w_n = (-1)^n |w_n|$ converge.
La série de terme général w_n est-elle convergente ? Justifier.

b) $|w_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ or la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc par équivalence de termes généraux positifs, la série $\sum |w_n|$ diverge. Ainsi la série de terme général w_n n'est pas absolument convergente.

Solution (**Ex.2** – *Calcul d'une somme*)

1. a) De $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\cos u \underset{u\to 0}{\sim} 1$, on tire $q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

b) Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$, si !) donc par équivalence de termes généraux positifs, la série de terme général q_n converge.

2. a) Pour $n \geqslant 1$,
$\sin\dfrac{1}{n(n+1)} = \sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}$ donc $q_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$.

b) Par la propriété de la série des différences, la série $\sum_n q_n = \sum_n \left(\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_n$ converge.
Comme $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tan(0) = 0$ (par continuité de la fonction tangente, n'est-ce pas ?), la série de terme général q_n converge.
Et par télescopage, pour tout $n \geqslant 1$,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_k = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tan(1)$, ce qui prouve aussi la convergence de la

série...

Bilan : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan(1)$.

Solution (**Ex.3** – *Autour de la fonction ζ de Riemann et de la série harmonique*)

1. $\mathcal{D}_\zeta =]\,1\,;\ +\infty[$ (cours : série de Riemann).

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [\,n\,;\ n+1]\,, \dfrac{1}{(n+1)^s} \leq \dfrac{1}{t^s} \leq \dfrac{1}{n^s}$.

Par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{(n+1)^s} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$

En sommant de 1 à N : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^s}$.

D'où : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} + 1 - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^s}$.

Or : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \left[\frac{1}{(-s+1)t^{s-1}}\right]_1^{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{s-1}$.

En passant à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$: $\dfrac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \dfrac{1}{s-1}$.

b) Par minoration, $\displaystyle\lim_{s\to1^+} \zeta(s) = +\infty$.

En multipliant par $s-1>0$ l'encadrement précédent, $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq (s-1)+1$ donne par encadrement $(s-1)\zeta(s) \xrightarrow[s\to1^+]{} 1$, donc $\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.

3. a) • Si $s \leqslant 0$, $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ ne tend pas vers 0 et la série définissant $\theta(s)$ diverge grossièrement.

• Si $s>0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)$ décroît et tend vers 0 donc le théorème de Leibniz affirme que la série converge.

• Bilan : $\mathcal{D}_\theta =]\,0\,;\ +\infty[$.

b) Toujours le théorème de Leibniz : $\theta(s)$ est du signe du premier terme de la série alternée, qui vaut 1. Donc θ est positive sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}, n \textit{ impair}} \frac{1}{n^s} - \sum_{1\leqslant n\leq 2\mathrm{N}, n \textit{ pair}} \frac{1}{n^s}$.

$\displaystyle\sum_{1\leqslant n\leq 2\mathrm{N}, n \textit{ pair}} \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k)^s} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^s}$.

$\displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant 2\mathrm{N}, n \textit{ impair}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} - \sum_{1\leqslant n\leq 2\mathrm{N}, n \textit{ pair}} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} - \frac{1}{2^s}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^s}$.

Donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{n^s} - 2 \times \frac{1}{2^s}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^s}$,

et en prenant la limite en $+\infty$: $\theta(s) = \left(1 - \dfrac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$.

d) $1 - \dfrac{1}{2^{s-1}} = 1 - \exp\big((1-s)\ln 2\big) \underset{s\to1}{\sim} -(1-s)\ln 2 \underset{s\to1}{\sim} (s-1)\ln 2$.

Comme $\zeta(s) \underset{s\to1^+}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$, $\theta(s) \xrightarrow[s\to1^+]{} \ln 2$.

4. a) Par étude de fonction, $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est positive sur $]-1\,;\; +\infty[$.

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -\left(\dfrac{-1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)\right) \leqslant 0$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geq 0.$

$u_n - v_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

c) Donc u (et v) converge(nt). Soit γ sa limite.

$\mathrm{H}_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ donc $\mathrm{H}_n - \ln n = \gamma + o(1)$ donc $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

5. a) $\theta_{2n}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n, k\ \textit{impair}} \frac{1}{k} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n, k\ \textit{pair}} \frac{1}{k}$

$\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n, k\ \textit{pair}} \frac{1}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}\mathrm{H}_n$, du coup :

$\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n, k\ \textit{impair}} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_{2n} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2n, k\ \textit{pair}} \frac{1}{k} = \mathrm{H}_{2n} - \frac{1}{2}\mathrm{H}_n$, et enfin :

$\theta_{2n}(1) = \mathrm{H}_{2n} - \dfrac{1}{2}\mathrm{H}_n - \dfrac{1}{2}\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n.$

b) $\theta_{2n}(1) = \ln(2n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) = \ln(2) + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$, donc $\theta(1) = \ln(2)$.

c) Oui : $\theta(s) \xrightarrow[s\to 1^+]{} \ln(2) = \theta(1)$.

6. a) $u_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{6}{n^3}$: convergence par équivalence de termes positifs.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \dfrac{6}{n} + \dfrac{6}{n+1} - \dfrac{24}{2n+1}.$

c) $\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2\mathrm{N}+2} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{2n} + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} + 1 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2n+1}.$

D'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{24}{2n+1} = 24\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+2} - 12\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} - 24$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n &= 6\mathrm{H}_n + 6\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} - 6 - 24\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+2} + 12\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} + 24 \\ &= 6\mathrm{H}_{\mathrm{N}} + 18\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} - 24\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+2} + 18\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n = 6\big(\ln \mathrm{N} + \gamma\big) + 18\big(\ln(\mathrm{N}+1) + \gamma\big) - 24\big(\ln(2\mathrm{N}+2) + \gamma\big) + 18 + o(1)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n = 6\ln\left(\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)^3}{(2\mathrm{N}+2)^4}\right) + 18 + o(1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 6\ln\frac{1}{2^4} + 18$

D'où : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = 18 - 24\ln 2.$

7. a) $\{3k+1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$ donc t_{3k+1} est le k-ième terme positif de la série, dont vaut $\dfrac{1}{2k+1}$.

t_{3k+2} et t_{3k+3} sont les $(2k)-$ième et $(2k+1)$-ième termes négaitifs de la série, dont valent respectivement $\dfrac{-1}{4k+2}$ et $\dfrac{-1}{4k+4}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3\mathrm{N}} t_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(t_{3k+1}+t_{3k+2}) + \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} t_{3k+3} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{4k+2} - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{4k+4}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{3\mathrm{N}} t_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2\mathrm{N}}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2}\theta_{2\mathrm{N}}(1).$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3\mathrm{N}} t_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{3\mathrm{N}+1} t_n = \sum_{n=1}^{3\mathrm{N}} t_n + t_{3\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2} + 0 = \frac{\ln 2}{2}$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{3\mathrm{N}+2} t_n = \sum_{n=1}^{3\mathrm{N}+1} t_n + t_{3\mathrm{N}+2} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{\ln 2}{2} + 0 = \frac{\ln 2}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} t_n$ converge, sa somme est $\mathrm{S} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

d) $\mathrm{S} = \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{1}{2}\theta(1)$, ce qui peut paraître paradoxal : on a sommé les mêmes termes... mais dans un ordre différent.