Exercice 1 *Études de convergence de séries*

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ converge.

3. Soit a un réel strictement positif. On pose, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{n!a^n}{n^n}.$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Étudier la nature de la série de terme général v_n suivant la valeur de a.

4. a) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n-\ln n}.$$

La série de terme général w_n est-elle convergente ? Justifier.

b) La série de terme général w_n est-elle absolument convergente ? Justifier.

Exercice 2 *Calcul d'une somme*

Pour tout entier naturel non nul n, on définit q_n par

$$q_n = \frac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}.$$

1. a) Déterminer un équivalent simple de q_n.

b) En déduire la nature de la série de terme général q_n.

2. a) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, exprimer q_n à l'aide de la fonction tangente.

b) Retrouver alors la convergence de la série de terme général q_n *sans utiliser d'équivalence* et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q_n$.

Exercice 3 *Autour de la fonction ζ de Riemann et de la série harmonique*

On pose, pour $s \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Quel est l'ensemble de définition de ζ ?

2. a) À l'aide de comparaisons de sommes et d'intégrales, montrer que

$$\forall s > 1, \quad \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}.$$

b) En déduire $\lim_{s \to 1^+} \zeta(s)$ ainsi qu'un équivalent de ζ en 1^+.

3. On pose, pour $s \in \mathbb{R}$ et sous réserve d'existence,

$$\theta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

a) Quel est l'ensemble de définition de θ ?

b) Quel est le signe de θ sur son ensemble de définition ?

c) Montrer que, pour tout $s > 1$,

$$\theta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s).$$

d) En déduire que $\lim_{s \to 1^+} \theta(s) = \ln 2$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a) Montrer que, pour tout $x \in \left]-1\,;\ +\infty\right[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{H}_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

c) En déduire l'existence d'une constante réelle γ telle que, pour n tendant vers $+\infty$,

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}$, $\theta_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_{2n}(1) = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n$.

b) En déduire $\theta(1)$.

c) La fonction θ est-elle continue à droite en 1 ?

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2}$ et on rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général w_n.

b) Déterminer trois réels α, β et γ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{2n+1}.$$

c) Montrer que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} w_n = 6\mathrm{H}_{\mathrm{N}} + 18\mathrm{H}_{\mathrm{N}+1} - 24\mathrm{H}_{2\mathrm{N}+2} + 18.$$

d) En déduire la somme de la série de terme général w_n.

7. On décide de sommer les termes $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ dans un ordre différent de celui de la question précédente. On prend d'abord un terme positif, suivi de deux termes négatifs, puis à nouveau un terme positif, puis les deux termes négatifs suivants, etc.
On souhaite donc calculer :

$$\mathrm{S} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

a) Montrer que cela revient à s'intéresser à la série de terme général t_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \begin{cases} 1/(2k+1) & \text{si } n = 3k+1, \\ -1/(4k+2) & \text{si } n = 3k+2, \\ -1/(4k+4) & \text{si } n = 3k+3. \end{cases}$$

b) En remarquant que $t_{3k+1} + t_{3k+2} = \dfrac{1}{4k+2}$, montrer que

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{3\mathrm{N}} t_n = \frac{1}{2}\theta_{2\mathrm{N}}(1).$$

c) En déduire la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} t_n$ ainsi que la valeur de S.

d) Comparer S à $\theta(1)$. En quoi ces résultats peuvent-ils paraître paradoxaux ?

★★★★★

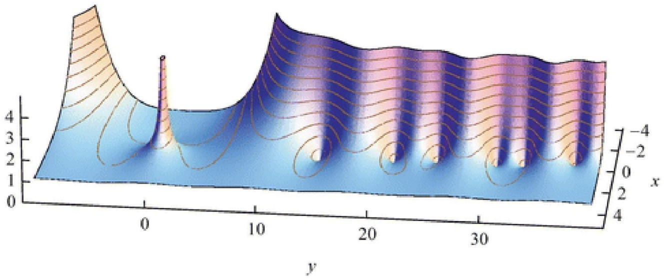
FIN

★★★★★

La fonction Zêta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$



★★★★★

★★★★★

QUINCAILLERIE D'ALEMBERT