Exercice 1 *Natures*

Déterminer la nature de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle I :

1. $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2t+1}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\,+\infty[$
2. $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,1\,;\,+\infty[$
3. $f : t \mapsto \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^3+t^2}}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,1]$
4. $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{t^3+1}}$, $\mathrm{I} = [\,0\,;\,+\infty[$
5. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} =]\,1\,;\,2]$
6. $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\ln(t)}$, $\mathrm{I} = [\,2\,;\,+\infty[$
7. $f : t \mapsto \dfrac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty[$
8. $f : t \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$, $\mathrm{I} =]\,0\,;\,+\infty[$

Solution (**Ex.1** – *Natures*)

1. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, ou encore $\mathrm{F} : t \mapsto \dfrac{-1}{t+1}$;
2. Convergente : $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} = o\left(\dfrac{1}{t^{5/4}}\right)$;
3. Divergente : $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$;
4. Convergente : $\forall t \geq 1, |f(t)| \leq \dfrac{2}{t^{3/2}}$;
5. Divergente :
   $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{t-1}$, et par translation de la variable $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}$, donc divergente.
6. Convergente : $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, ou encore : $\forall t \geq 3, f(t) \leq \mathrm{e}^{-t}$;
7. Divergente : $0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
   mais : $\forall t \in]\,0\,;\,1[\,, f(t) = \dfrac{1}{t}$ entraîne la divergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$;
8. Convergente : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ assure l'intégrabilité en $+\infty$,
   et en 0 : $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \ln(t^2+1) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge ...
   Remarque : une intégration par parties peut aussi justifier la convergence (et donner la valeur) :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \pi ...$

Exercice 2 *Calculs*

Montrer l'existence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$
2. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\exp(x)+1)(\exp(-x)+1)}$
3. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\big(1+\frac{1}{x^2}\big)\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5. $\mathrm{M} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$
6. $\mathrm{R} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\ln(\sin x)\mathrm{d}x$

Solution (**Ex.2** – *Calculs*)

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par équivalence.
   $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = \left[\ln\frac{x+1}{x+2}\right]_0^{+\infty} = \ln 2.$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}+1)}$ continue positive sur $[\,0\,;\,+\infty[$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$: convergence par équivalence.
   $\mathrm{J} \overset{u=\mathrm{e}^x}{=} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$

3. $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ continue positive sur $]\,0\,;\ +\infty[$,

$\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(1+x^2) - 2\sqrt{x}\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et

$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$: convergence par domination en 0 et équivalence en $+\infty$.

$\mathrm{K} \overset{\text{IPP}}{=} \left[x\ln(1+1/x^2)\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi.$

4. $f : x \mapsto \exp(-\sqrt{x})$ continue positive sur $[\,0\,;\ +\infty[$, $x^2 f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en $+\infty$.

$\mathrm{L} \overset{u=\sqrt{x}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} 2u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \overset{\text{IPP}}{=} \left[-2u\mathrm{e}^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2.$

5. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$, $\sqrt{x}f(x) \xrightarrow[x\to 0]{=} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ en 0 et $x^{3/2}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ en $+\infty$: convergence par domination en 0 et en $+\infty$.

$\mathrm{M} \overset{u=1/x}{=} -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{(u+1)^2}\mathrm{d}u = -\mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} = 0$.

6. $f : x \mapsto \sin x \ln(\sin x)$ continue sur $]\,0\,;\ \pi/2]$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc intégrale faussement impropre.

$\mathrm{R} \overset{x=\cos t}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t)\mathrm{d}t = \ln 2 - 1.$

Exercice 3 *Tassement*

Soit $f : [\,0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable.

Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Solution (**Ex.3** – *Tassement*)

Il suffit d'écrire (Chasles) :

$$\int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0 \ ...$$

Exercice 4 *Une différence entre séries et intégrales*

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t.$

Indication : On commencera par poser $u = t^2$, puis par faire une intégration par parties...

2. a) Est-il nécessaire que le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tende vers 0 pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge ?

b) Est-il nécessaire que f, continue par morceaux sur $[\,a\,;\ +\infty[$, admette une limite nulle en $+\infty$ pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ existe ?

Solution (**Ex.4** – *Une différence entre séries et intégrales*)

1. Le changement de variable $u = t^2$ conduit à l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, qui en intégrant par parties est de même nature que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{3/2}}\mathrm{d}u$, elle-même absolument convergente par comparaison à l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$.

2. a) Si une série converge, son terme général tend vers 0 :

$$u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k=n_0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = 0.$$

C'est dans le cours de première année.

b) $f : t \mapsto \sin(t^2)$ est continue sur $[\sqrt{\pi}\,;\ +\infty[$, n'admet aucune limite en $+\infty$ et pourtant $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} f$ existe...

Exercice 5 *Que faire d'un logarithme ?*

Montrer l'existence et calculer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.5** – *Que faire d'un logarithme ?*)

Ici, il est INTERDIT DE NE RIEN TENTER, car tout marche :

• pour l'existence :

☞Comparaison : $\forall x \leq 0,\ 0 \leq \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \leq \mathrm{e}^{-x}\ln(2)$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ existe ...

☞Négligeabilité : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0$ donc $\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$ ...

☞Équivalence : $e^{-x}\ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} (e^{-x})^2$ et $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx \overset{\text{primit.}}{=} \frac{1}{2}$ existe ...

• pour l'existence et la valeur (comme souvent, savoir calculer la valeur permet de justifier au passage l'existence) :

☞Calcul d'une primitive : la formule de dérivation $(u\ln u)' = u'\ln u + u'$ fournit $u'\ln u = \big(u(\ln u - 1)\big)'$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx \overset{\text{primit.}}{=} -\left[(1+e^{-x})\big(\ln(1+e^{-x})-1\big)\right]_0^{+\infty} = 1+2(\ln 2 - 1) = 2\ln 2 - 1$;

☞Changement de variable : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx \overset{u=e^{-x}}{=} \int_0^1 \ln(1+u)du \overset{\text{IPP}}{=} [(1+u)\ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+u}{1+u}du = 2\ln 2 - 1$;

☞Par intégration par parties : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{-x})dx \overset{\text{IPP}}{=} \left[-(1+e^{-x})\ln(1+e^{-x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(1+e^{-x})\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = 2\ln 2 - \Gamma(1) = 2\ln 2 - 1$.

Exercice 6 *Arctangentes en cascade*

1. Justifier la convergence des intégrales
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2},\ \mathrm{J} = \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2} \text{ et } \mathrm{K} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt.$$
2. Les calculer.

Solution (**Ex.6** – *Arctangentes en cascade*)

1. I, J et K convergent par le critère des équivalents.
2. $\mathrm{I} \overset{\text{primit.}}{=} [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{I} \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + 2\mathrm{K}$ donc $\mathrm{K} = \frac{\pi}{4}$.

   $\mathrm{J} = \mathrm{I} - \mathrm{K} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 *Limite d'une famille de séries*

1. Soit $a \in]0\,;\,+\infty[$.

   a) Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a}{n^2+a^2}$ converge.

   b) Montrer que : $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{\pi}{2}$.

2. Montrer l'existence de $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$, puis la calculer.

Solution (**Ex.7** – *Limite d'une famille de séries*)

1. a) $\frac{a}{n^2+a^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ assure la convergence par le critère des équivalents pour ces séries à terme général positif et par la convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in [\,n\,;\,n+1\,]$, $\frac{a}{n^2+a^2} \geq \frac{a}{t^2+a^2}$, donc $\frac{a}{n^2+a^2} \geq \int_n^{n+1}\frac{a}{t^2+a^2}dt$

$\forall t \in [\,n-1\,;\,n\,]$, $\frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{a}{t^2+a^2}$, donc $\frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{a}{t^2+a^2}dt$

En sommant ces inégalités pour $n \in [\![1\,;\,\mathrm{N}]\!]$,
$$\int_1^{\mathrm{N}+1}\frac{a}{t^2+a^2}dt \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{a}{n^2+a^2} \leq \int_0^{\mathrm{N}}\frac{a}{t^2+a^2}dt.$$
À l'aide de la primitive $t \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{a}\right)$ de $t \mapsto \frac{a}{t^2+a^2}$,
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{\mathrm{N}+1}{a}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{a}{n^2+a^2} \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right).$$
Par conservation des inégalités (larges) en passant à la limite :
$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} \leq \frac{\pi}{2}.$$

2. Puisque $\lim_{a\to+\infty}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) = 0$, $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$ existe par le théorème d'encadrement et
$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*

Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose, sous réserve d'existence,

$$\Gamma(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
Γ s'appelle la fonction gamma d'Euler.

2. a) Montrer que, pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty[$,
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
En quelque sorte, Γ prolonge la factorielle sur $]\,0\,;\,+\infty[$... au décalage d'une unité près.

3. On admet que Γ est une fonction continue.
Déterminer un équivalent de $\Gamma(x)$ au voisinage de 0.

4. Pour tous p et q de $\mathbb{N}$, on pose sous réserve d'existence,
$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^1 z^p \ln^q z\mathrm{d}z.$$
En utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln z$, justifier l'existence de $\mathrm{I}_{p,q}$ et la calculer.

Solution (**Ex.8** – *Fonction gamma d'Euler et suite double d'intégrales*)

1. • $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ assure la convergence en $+\infty$.
• $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ et $x-1 > -1$ assure la convergence en 0 (et aussi la divergence si $x \leq 0$...).

2. a) Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty[$. Comme $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et $t^x\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, par une intégration par parties, j'obtiens :
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$...

3. $\forall \mathrm{X} > 0, \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ or $\Gamma(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \Gamma(1)$ par continuité donc $\Gamma(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
D'où $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. Le changement proposé étant une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante,
$$\mathrm{I}_{p,q} \overset{u=1(p+1)\ln z}{=} \int_{+\infty}^0 \left(\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)^p \left(\frac{-u}{p+1}\right)^q \left(\frac{-1}{p+1}\mathrm{e}^{-u/(p+1)}\right)\mathrm{d}u$$
$$= \frac{(-1)^q}{(p+1)^{q+1}}\Gamma(q+1) = (-1)^q\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}.$$

Exercice 9 *Heureuse intégrale à paramètre*

Soit a un réel.

1. Établir la convergence de
$$\mathrm{I}_a = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

2. Calculer I_a.

Solution (**Ex.9** – *Heureuse intégrale à paramètre*)

1. $\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{a^2}{t^2}$ donne la convergence en $+\infty$ par équivalence (Riemann en $+\infty$).
$\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right) = \ln(t^2+a^2) - 2\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$ donne la convergence en 0 par équivalence ($\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge).

2. $\mathrm{I}_a \overset{\text{IPP}}{=} \left[t\ln\left(1+\dfrac{a^2}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} t\left(\frac{2t}{t^2+a^2} - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2a^2}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$
$\mathrm{I}_a = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t/a)^2+1}\mathrm{d}t \overset{u=t/a}{=} 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}a\mathrm{d}u = 2a\frac{\pi}{2} = a\pi$ (happy ?)

Exercice 10 *Intégrales à paramètre*

a désigne un réel de $]\,0\,;\,+\infty[$.

1. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
$$\mathrm{I}_a \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

2. Justifier l'existence de
$$\mathrm{J}_a \overset{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

3. À l'aide du changement de variable $u = a^2/t$, calculer J_a.

Solution (**Ex.10** – *Intégrales à paramètre*)

1. $t \mapsto \dfrac{1}{a^2+t^2}$ est continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$. Comme $\dfrac{1}{a^2+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, on obtient l'existence par équivalence.
   $\mathrm{I}_a \overset{u=t/a}{=} \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+u^2} a\mathrm{d}u = \dfrac{1}{a}\left[\mathrm{Arctan} u\right]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2a}$.
2. $\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{a^2}\ln t$ donc par équivalence de fonctions négatives (et comme $\displaystyle\int_0^1 \ln t \mathrm{d}t$ existe), $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$ existe.
   $t^{3/2}\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\ln t}{a^2+t^2} = o\left(t^{3/2}\right)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t$ existe par domination.
   Donc J_a existe.
3. $\mathrm{J}_a \overset{u=a^2/t}{=} \displaystyle\int_{+\infty}^0 \dfrac{2\ln a - \ln u}{a^2+a^4/u^2}\left(\dfrac{-a^2}{u^2}\right)\mathrm{d}u = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2\ln a - \ln u}{u^2+a^2}\mathrm{d}u = 2\ln(a)\mathrm{I}_a - \mathrm{J}_a$
   d'où $\mathrm{J}_a = \ln(a)\mathrm{I}_a = \dfrac{\pi \ln a}{2a}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ *Convergence de l'intégrale de Dirichlet*

1. Montrer que
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$
converge.
2. En déduire la nature de
$$\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$$
3. Justifier l'existence de
$$\mathrm{D} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t,$$
intégrale de Dirichlet (qui vaut $\pi/2$ pour information).

Solution (**Ex.11** – *Convergence de l'intégrale de Dirichlet*)

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2}$ donc I est faussement impropre en 0.
   $0 \leq \dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$ permet de comparer I à une intégrale convergente en $+\infty$.
2. Une intégration par parties permet de conclure, avec en plus $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. L'intégrande est paire (à vérifier !), donc D existe (et vaut 2J).

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ *Une fonction constante*

Soit
$$g :]\,0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est effectivement définie sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
2. On admet que : $g(1) = \dfrac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).
   À l'aide d'un changement de variable, calculer $g(x)$ pour $x \in\,]\,0\,;\,+\infty[$.

Solution (**Ex.12** – *Une fonction constante*)

1. L'intégrale est faussement impropre en 0 car $\displaystyle\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(xt)}{t} = x$. La convergence en $+\infty$ se prouve en par une intégration par parties en dérivant $t \mapsto 1/t$ et primitivant $t \mapsto \sin(xt)$, puis par comparaison, grâce à l'intégrale de Riemann da paramètre $\alpha = 2$.
2. $g(x) \overset{u=xt}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ *Convergences*

1. Nature de
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin t}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\sin t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin t}}\mathrm{d}t.$$
2. En effectuant changement de variable $u = \pi - t$ dans K, déterminer la nature de
$$\mathrm{L} = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin t}}\mathrm{d}t.$$

Solution (**Ex.13** – *Convergences*)

1. $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$: I diverge ; $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\sin t} \underset{t\to 0}{\sim} -1$: J converge (faussement impropre) ;
   $\dfrac{1}{\sqrt{\sin t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$: K converge.
2. $\mathrm{K} \overset{u=\pi-t}{=} \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin(\pi-u)}} = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin(u)}}$. Par la relation de Chasles, L existe et $\mathrm{L} = \mathrm{K} + \mathrm{K}$.