Exercice 1 *Équivalence des termes généraux, application à $\zeta(2)$*

1. *Question préliminaire*
Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles ne s'annulant pas.
On rappelle qu'alors,
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
Montrer l'équivalence
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \iff \forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \quad |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|.$$

2. Soit $\sum_{n\geq n_0} a_n$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ deux séries convergentes à termes strictement positifs.
On note $\mathrm{R}_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $\mathrm{R}'_n \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ leur reste respectif.
On suppose que
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n.$$
Montrer que
$$\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n.$$

3. *Application à $\zeta(2)$.*
On admet la formule d'Euler $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
On note, pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}$.
   b) En déduire un équivalent de R_n.
   c) Déterminer le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$.
   d) En déduire que le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 2} \left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2}\right)$ est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$.
   e) En déduire que
$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
   f) Montrer finalement que
$$\mathrm{S}_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution (**Ex.1 –** *Équivalence des termes généraux, application à $\zeta(2)$*)

1. • Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la limite
$$\exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon, \textit{ i.e. } |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|.$$
• Si $\forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon\,|b_n|$,
alors $\forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{N}_0 \geqslant n_0, \forall n \geqslant \mathrm{N}_0, \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$,
donc $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, *i.e.* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

2. Utilisons la caractérisation précédente.
Soit $\varepsilon>0$. Soit $\mathrm{N}_0 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0, |a_n - b_n| \leqslant \varepsilon b_n$.
Alors : $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0$, $|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}'_n| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k - b_k| \leqslant \varepsilon \mathrm{R}'_n$
Ce qui entraîne, toujours par la caractérisation que $\mathrm{R}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{R}'_n$.

3. *Application à $\zeta(2)$.*
   a) $$\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{n}.$$

b) En notant $R'_n = \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{n}$, comme $\frac{1}{(k-1)k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$, *i.e.* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

c) En décomposant en éléments simples :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1/2}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1/2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

Et $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

d) $\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ donc par la question précédente le reste d'ordre n de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k^2}$ est équivalent à $\frac{1}{2n^2}$.

e) $R_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k-1)k}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$ que l'on peut écrire

$$R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

f) Cette égalité provient directement de $S_n + R_n = \frac{\pi^2}{6}$ et de l'égalité précédente.