Exercice 1 *Une intégrale généralisée vs une somme de série*

1. a) Justifier l'existence de $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. On admet que $\mathrm{S} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b) Justifier l'existence de

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t.$$

2. a) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{J}_k = \int_0^1 t^k \ln t \mathrm{d}t$$

existe.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{I} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{J}_k = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} \mathrm{d}t.$$

3. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de J_k.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

5. Montrer finalement que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. En s'inspirant de ce qui précède, montre que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. **Pour les 5/2 uniquement,** retrouver les deux dernières réponses à l'aide du théorème d'intégration terme à terme.

Solution (**Ex.1** – *Une intégrale généralisée vs une somme de série*)

1. a) ☞ **S n'est pas une somme de Riemann**. Vous avez croisé des sommes de Riemann l'an dernier, ce sont des sommes du type

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

que l'on utilise dans la méthode des rectangles pour calculer la valeur approchée d'une intégrale sur $[0\,;\ 1]$ par exemple.

☞ **S n'est pas une série de Riemann**. La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ n'est pas un nombre, mais une suite de nombres, à savoir la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n \geqslant 1}$.

☞ **S est la somme de la série de Riemman de terme général $\boldsymbol{\dfrac{1}{n^2}}$.**

S existe par convergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$.

b) **On commence par là, en donnant un nom à l'intégrande :**

$$f : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1} \text{ est } \textbf{continue} \text{ sur }]\,0\,;\ 1[.$$

... ce qui assure que f est intégrable sur tout segment contenu dans $]0\,;1[$, les seules impropretés étant en 0 et en 1.

☞ **Attention !** C'est la fonction f qui est continue, pas l'intégrale I : I est un nombre, ça n'a pas de sens de dire qu'un nombre est continu.

$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} -\ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente. Par équivalence de **fonctions positives**, $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t$ existe.

$f(t) \underset{t\to 1}{\sim} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 1, et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ est faussement impropre donc convergente.

☞ **Attention !** C'est la fonction f qui est prolongable par continuité, pas l'intégrale (une intégrale est un nombre, vous pouvez « prolonger un nombre par continuité » ?), et c'est l'intégrale qui est faussement impropre.

Donc par la relation de Chasles, I existe.

2. a) Si $k = 0$, cette intégrale est une intégrale de référence convergente.
Si $k \geq 1$, $t \mapsto t^k \ln(t)$ est **continue sur $]0\,;1[$** et prolongeable par continuité en 0 car de limite nulle donc finie en 0, donc l'intégrale est faussement impropre donc existe.

b) **Comme toutes les intégrales existent, on peut utiliser la linéarité :**

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^k \ln(t)\mathrm{d}t.$$

Et comme $t \in]\,0\,;\;1[$, on peut utiliser la somme de termes géométriques

$$\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^n - 1}{t-1},$$

égalité fausse pour t=1 (division par 0 !), donc il serait bon de préciser que $t \in]\,0\,;\;1[$. On poursuit le calcul

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}-1}{t-1}\ln(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t - \mathrm{I}$$

d'où la relation demandée.

☞ On peut raisonner par récurrence mais ce n'est pas nécessaire comme le montre ce raisonnement.

3. **Avant d'intégrer par parties, il faut s'assurer de ne pas écrire des choses qui n'existent pas, des différences de quantités divergentes par exemple...**
Proposition de rédaction :

$t \longmapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\;1[$, avec

$$\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 0.$$

☞ Ne pas écrire ceci et écrire directement $\left[\dfrac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_0^1$ **n' a priori pas de sens** puisque ln(0) n'existe pas ! Ce « 0 » n'est qu'une limite, encore faut-il être sûr que cette limite existe.

Puisque $\displaystyle\int_0^1 t^k \ln t\mathrm{d}t$ existe, nous pouvons intégrer par parties :

$$\int_0^1 t^k \ln t\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k\mathrm{d}t = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

4. Soit

$$g : [0\,;\ 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ \dfrac{t\ln(t)}{t-1} & \text{si } t \in\,]0\,;\ 1[\,, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

g est continue sur le segment $[0\,;\ 1]$ donc bornée.
En effet :
(i) $t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ donc $g(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$,
(ii) $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$ induit $g(t) \underset{t\to 1}{\sim} 1$, donc $g(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1$.
Soit $\mathrm{M} = \sup\limits_{[0\,;\ 1]} |g|$.
Alors par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{M}\mathrm{d}t$$

or $\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{M}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par encadrement, on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

☞ Contrairement à une intuition naturelle, il ne suffit pas d'avoir

$$\forall t \in\,]0\,;\ 1[\,, \quad \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour affirmer que

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 0 = 0.$$

Prenons par exemple

$$\forall t \in\,]0\,;\ 1[\,, \quad nt^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et pourtant

$$\int_0^1 nt^n\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0 = \int_0^1 0.$$

☞ De même, il est **faux** d'affirmer que **par linéarité**

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t.$$

En effet, la linéarité ne peut s'appliquer qu'à un nombre fini k de fonctions, puisqu'on la démontre d'abord pour 2 fonctions, puis par récurrence pour tout k de $\mathbb{N}^*$, k restant un nombre fini.

☞ Nous verrons dans le courant de l'année des théorèmes s'appliquant aux situations décrites ci-dessus... c'est pour cela que j'ai demandé aux 5/2 de réprendre ces questions avec d'autres armes...

---

5. Par 2.b), $\displaystyle \mathrm{I} = -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k\ln(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$.

Par 3), $\displaystyle \mathrm{I} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$.

Par 4., en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'expression précédente,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

6. Voici la trame qui reprend exactement la démarche précédente.

- On justifie l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t$.
- On part de : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0\,;\,1[, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (t^2)^k = \frac{1-t^{2(n+1)}}{1-t^2}$.
- On multiplie par $\ln(t)$ et on intègre.
- On observe que $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}$ (déjà fait !).
- On justifie que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}\ln t}{t^2-1}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par la méthode de la question 4 en utilisant la fonction

$$h : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{g(t)}{t+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{t\ln(t)}{t^2-1} & \text{si } t \in\,]0\,;\,1[\\ 1/2 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

qui est continue sur $[0\,;\,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- On conclut car $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \big(1-\frac{1}{4}\big)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

7. Notons, pour tout k de $\mathbb{N}$, $f_k :]\infty\,;\,\infty[01 \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto t^k \ln t$.
On raisonne sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.

① Pour tout k, f_k est continue,

② La série $\displaystyle\sum_k f_k$ converge simplement vers $\mathrm{S} : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1-t}$,

③ S est continue,

④ Comme $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on peut affirmer que

$$\int_0^1 \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{(k+1)^2},$$

ce qui donne l'égalité de la question 5.
En raisonnant de même avec la suite des fonctions (f_{2k}), on démontre l'égalité de la question 6.