Solution (**Ex.1** – *Une intégrale de Frullani - D'après E.M.Lyon 2009*)

1. a) $\exp(x) \underset{x\longrightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ et en utilisant l'ordre 1,
$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \underset{x\longrightarrow 0}{=} \frac{1-ax-(1-bx)+o(x)}{x} \underset{x\longrightarrow 0}{=} b-a+o(1)$ donc $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} b-a$

b) On peut invoquer au choix :

- $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant \frac{e^{-ax}}{x} \leqslant e^{-ax}$, • $\frac{e^{-ax}}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-ax}\right)$,
- $\frac{e^{-ax}}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$... et s'appuyer sur nos intégrales de référence.

2. L'intégrande est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 d'après 1.a) donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ est faussement impropre donc convergente.

Comme les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}dx$ existent d'après 1.b), $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ existe par linéarité.

Ainsi l'intégrale doublement impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ existe.

3. a) Par les changements de variables $\mathcal{C}^1$ sur $[\,\varepsilon\,;\,\mathrm{X}]$ $y=ax$ et $y=bx$ respectivement, on a : $\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{e^{-ax}}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{a\mathrm{X}} \frac{e^{-y}}{y}dy$ et $\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{e^{-bx}}{x}dx = \int_{b\varepsilon}^{b\mathrm{X}} \frac{e^{-y}}{y}dy$.

b) En soustrayant membre à membre les égalités précédentes, la relation de Chasles :
$\int_{a\varepsilon}^{a\mathrm{X}} \cdots - \int_{b\varepsilon}^{b\mathrm{X}} \cdots = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \cdots + \int_{b\varepsilon}^{a\mathrm{X}} \cdots - \left(\int_{b\varepsilon}^{a\mathrm{X}} \cdots + \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \cdots\right) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \cdots - \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \cdots$
donne $\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}dy - \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \frac{e^{-y}}{y}dy$.

4. a) Sur $]\,0\,;\,+\infty[$, h est le quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Comme $e^{-y}-1 \underset{y\to 0}{\sim} -y$, $h(y) \xrightarrow[y\to 0]{} 1 = h(1)$ donc h est continue ne 1.

b) • En notant H une primitive de h,
$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)dy = \mathrm{H}(b\varepsilon) - \mathrm{H}(a\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{H}(0)-\mathrm{H}(0) = 0$$
car H est continue en 0.

- Or $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y}dy - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}dy = \ln\frac{b}{a} - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}dy$
- Donc $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \ln\frac{b}{a}$.

c) En prenant la limite de la relation de 3.b) lorsque ε tend vers 0, avec la limite trouvée précédemment, on obtient, pour tout X de $]\,0\,;\,+\infty[$: $\int_0^{\mathrm{X}} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a} - \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \frac{e^{-y}}{y}dy$.

d) Comme : $\forall \mathrm{X} \geqslant \frac{1}{a}, \forall y \geqslant a\mathrm{X}, 0 \leqslant \frac{e^{-y}}{y} \leqslant e^{-y}$ car $y \geqslant 0$, on a par croissance de l'intégrale : $0 \leqslant \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \frac{e^{-y}}{y}dy \leqslant \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} e^{-y}dy$.

Or $\int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} e^{-y}dy = e^{-a\mathrm{X}} - e^{-b\mathrm{X}} \leqslant e^{-a\mathrm{X}} \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} 0$.

Par encadrement, $\int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} e^{-y}dy \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} 0$.

En passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ dans l'égalité de 4.c), on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \ln\frac{b}{a}.$$

Solution (**Ex.2** – *Étude de produits infinis - D'après Centrale 2024*)

1. Lien avec les séries

a) Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-1}}$ or il existe $\ell \in]\,0\,;\,+\infty[$ tel que $\mathrm{P}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et la suite extraite (P_{n-1}) converge aussi vers ℓ. Alors $u_n = \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell} = 1$.

b) En notant S la somme de la série de terme général $\ln(u_n)$, on a : $\ln(\mathrm{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{S}$, donc $\mathrm{P}_n = \exp(\ln(\mathrm{P}_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\mathrm{S})$ par continuité de la fonction exp : le produit infini de terme général u_n converge.

c) • $\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: le produit infini converge.

- $\ln(u_n) = -\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc la série de terme général $\ln(u_n)$ diverge grossièrement.

2. Deux premiers exemples

a) • $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$ et $\sum_n \dfrac{-1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ donc par équivalence de suites négatives la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

• $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or la série $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge par application directe du théorème des séries alternées car $(1/n)$ est une suite décroissante de limite nulle.

Et $-\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$ donc le même raisonnement que dans la série précédente montre que la série $\sum_n \left(-\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ converge.

Par linéarité, la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

b) Par 1.c) et la convergence des séries de 2.a), les produits infinis $\mathrm{P}_1 = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ et $\mathrm{P}_2 = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$.

c) On peut raisonner par récurrence sur N ou calculer directement :

$$\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \prod_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \frac{\mathrm{N}!(\mathrm{N}+2)!/2}{(\mathrm{N}+1)!^2}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\frac{\mathrm{N}+2}{2} = \frac{\mathrm{N}+2}{2(\mathrm{N}+1)} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc $\mathrm{P}_1 = \dfrac{1}{2}$.

d) $\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{3} = 1$, puis $\dfrac{3}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{5}{4}\dfrac{4}{5} = 1$.

On conjecture que ce produit vaut toujours 1.

e) Une récurrence fonctionne à merveille.

Sinon, pour on peut séparer les indices pairs que je note $n = 2p$ des impairs que je note $n = 2p-1$.

$$\prod_{n=1}^{2\mathrm{N}}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = \prod_{p=1}^{\mathrm{N}}\frac{2p}{2p+1}\prod_{p=1}^{\mathrm{N}}\frac{2p+1}{2p} = 1 \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1.$$

Bref $\Pi_2 = 1$.

3. Formule de Wallis

a) Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ converge, par équivalence de termes généraux positifs, la série de terme général $\ln(u_n)$ converge, ce qui assure la convergence du produit infini de terme général u_n grâce à la question 1.b), une fois de plus.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u : x \longmapsto \sin(x)$ et $v : x \longmapsto \cos^{n+1}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,\pi/2]$, une intégration par parties assure :

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{n+2} &= \left[\sin(x)\cos^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)(n+1)\cos^n(x)(-\sin(x))\mathrm{d}x\\ &= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\cos^n(x)\mathrm{d}x\\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(x))\cos^n(x)\mathrm{d}x\\ &= (n+1)(\mathrm{W}_n - \mathrm{W}_{n+2})\end{aligned}$$

Donc $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.

c) • $\mathrm{W}_{2\times 0+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1 = \dfrac{2^0(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$ donc l'égalité voulue est vraie au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{W}_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_{2n+3} &= \frac{2n+2}{2n+3}\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \text{ par b),}\\ &= \frac{2(n+1)2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!}\times\frac{2(n+1)}{2n+2}\\ &= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \text{ ce qui est l'égalité souhaitée au rang } n+1.\end{aligned}$$

• Par récurrence, on a bien, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{W}_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

d) • James a dit : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}$.

• Alors $\mathrm{W}_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{2n}2\pi n n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2n\sqrt{2\pi 2n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^n u_k = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}$.

Or $\displaystyle\prod_{k=1}^n (4k)^2 = 4^n(n!)^2 = 2^{2n}(n!)^2$, Et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{2^n.n!}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=(2n+1)\frac{(2n)!}{2^n.n!}$

Ainsi : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}u_k=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!^2}(2^n.n!)^2=(2n+1)\mathrm{W}_{2n+1}^2$.

☞ On peut aussi raisonner par récurrence...

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}u_k=(2n+1)\mathrm{W}_{2n+1}^2\underset{n\to+\infty}{\sim}2n\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}\right)^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2n\pi}{4n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}$ donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\frac{\pi}{2}\qquad\text{(John Wallis – 1656).}$$

Solution (**Ex.3** – *Une intégrale par l'étude d'une fonction - D'après E3A 2022*)

1. a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-at)\,\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $a>0$, et, lorsqu'elle existe, cette intégrale vaut $\dfrac{1}{a}$.

b) $u : t\longmapsto t$ et $v : t\longmapsto -\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-xt}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\,+\infty[$ avec $u(t)v(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et $u(t)v(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$, donc par intégration par parties $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty}u'(t)v(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ qui existe. Donc la première intégrale existe et vaut

$$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=-\left(-\frac{1}{x}.\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

2. Ensemble de définition de *f*

a) $\sin(t)\underset{t\to 0}{\sim}t$.

b) • $h : t\longmapsto\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

• $h(t)\underset{t\to 0}{\sim}\left(\dfrac{t}{t}\right)^2\underset{t\to 0}{\sim}1$ donc $h(t)\xrightarrow[t\to 0]{}1$: h admet une limite finie donc est prolongeable par continuité en 0.

c) • Notons que $|h|=h$ car $h\geqslant 0$.

• Il découle de la question précédente que h est intégrable sur $]0\,;\,1]$, son intégrale étant faussement impropre en 0.

• $\forall t\geqslant 1, h(t)\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ et comme $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$ d'après la propriété de Riemann $(2>1)$, h est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

• Donc h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) • $f(0)$ existe d'après la question précédente.

• Pour $x>0$, l'intégrale définissant $f(x)$ est faussement impropre en 0 puisque l'intégrande tend vers 1 en 0. Donc l'intégrande est intégrable sur $]0\,;\,1]$.

Et : $\forall t\geqslant 1,\quad 0\leqslant h(t)\leqslant 1$ car $\sin^2(t)\leqslant 1$ et $t^2\geqslant 1$.

Donc : $\forall t\geqslant 1,\quad 0\leqslant h(t)\mathrm{e}^{-xt}\leqslant\mathrm{e}^{-xt}$ or $t\longmapsto\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$. Donc l'intégrande est intégrable sur $[1\,;\,+\infty[$.

Donc $f(x)$ est bien définie.

• Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Dérivées première et seconde de *f*

Dans cette question, x désigne un réel strictement positif.

a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $|\sin'|=|\cos|\leqslant 1$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, sinus est 1-lipschitzienne.

Donc : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2, |\sin(a)-\sin(b)|\leqslant|a-b|$, ce qui avec $a=t\geqslant 0$ et $b=0$ démontre l'encadrement voulu.

☞ On peut aussi observer que $\forall t\in[0\,;\,\pi/2]\,, 0\leqslant\sin(t)\leqslant t$ par concavité de sinus et $\forall t\geqslant\pi/2, |\sin(t)|\leqslant 1<\pi/2\leqslant t$...

b) De $\sin^2(t)\leqslant t^2$ on tire :

• $\forall t>0,\quad 0\leqslant\dfrac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\leqslant t\mathrm{e}^{-xt}$ or par 1.b) cette fonction majorante est intégrable. Donc la première fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\forall t>0,\quad 0\leqslant\sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt}\leqslant\mathrm{e}^{-xt}$ or par 1.a) cette fonction majorante est intégrable. Donc la première seconde est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Une expression explicite de *f"(x)*

Dans cette question, x désigne à nouveau un réel strictement positif et θ désigne un réel quelconque. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

a) $\left|\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\right|=|\mathrm{e}^{-xt}|\times\left|\mathrm{e}^{-i\theta t}\right|=\mathrm{e}^{-xt}\times 1$

b) Comme $x>0$, $\mathrm{e}^{-xt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, donc $\left|\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\right|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}=0$.

c) • $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\mathrm{d}t$ converge absolument puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\right|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$, intégrale convergente (cf. 1.a).

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}}{-x+i\theta}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i\theta} = \frac{x+i\theta}{x^2+\theta^2}.$

d) En déduire finalement, à l'aide de la formule d'Euler $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2}$, que

$$f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2\left(x^2+4\right)}.$$

- $\sin^2(t) = \dfrac{-1}{4}(\mathrm{e}^{2it} - 2 + \mathrm{e}^{-2it})$ par la formule d'Euler.
- $f''(x) = \dfrac{-1}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x+2it} - 2\mathrm{e}^{-xt} + \mathrm{e}^{-x-2it}\mathrm{d}t = \frac{-1}{4}\left(\frac{x+2i+x-2i}{x^2+2^2}\right) + \frac{1}{2}.\frac{1}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2\left(x^2+4\right)}.$

5. Une expression explicite de *f(x)*

a) Il découle de 3.a) que : $\forall t>0, \quad \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2 \leqslant 1.$

b) • J'en déduis immédiatement, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$, et par encadrement $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

• Et toujours par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant |f'(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}$, et par encadrement $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

c) En primitivant f'', il existe une constante k telle que

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) + k = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) + k.$$

On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = k$, et par unicité de la limite

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4).$$

d) Je calcule la primitive nulle en 1 de $g : x \longmapsto \ln(x^2+4)$ par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^x g(t)\mathrm{d}t &= \left[t\ln(t^2+4)\right]_1^x - \int_1^x t.\frac{2t}{t^2+4}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(x^2+4) - \ln(5) - 2\int_1^x \frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(x^2+4) - \ln(5) - 2x + 4\int_1^x \frac{1/2}{(t/2)^2+4}\mathrm{d}t \\
&= x\ln(x^2+4) - \ln(5) - 2x + 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) - 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $g : x \longmapsto \ln(x^2+4)$ est

$$\mathrm{G} : x \longmapsto x\ln(x^2+4) - 2x + 4\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right).$$

e) En primitivantf', il existe une constante K telle que pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}(x\ln(x)-x) - \frac{x}{4}\ln(x^2+4) + \frac{x}{2} + \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{K} \\
&= \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{K}
\end{aligned}$$

On a alors, puisque $\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-4}{x^2+4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-4}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{K}$, et par unicité de la limite

$$\forall x>0, \quad f(x) = \frac{x}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \quad .$$

6. Valeur de deux intégrales généralisées

a) f est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ donc $f(0) = \displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$.

Or $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t$ et $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} \dfrac{\pi}{2}$.

Donc

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

b) Comme $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est paire et intégrable sur R_+^*, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi.$$