Les exercices sont indépendants.

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Note importante. Si une question n'est pas résolue, il est possible d'en admettre le résultat, que l'on veillera à correctement citer lorsqu'on l'utilisera. La clarté de la rédaction et la précision des raisonnements font partie intégrante de l'évaluation d'une copie. On veillera notamment à encadrer soigneusement *tous* les résultats demandés.

Exercice 1 *Une intégrale de Frullani - D'après E.M.Lyon 2009*

Dans cet exercice, a et b désigne deux réels strictement positifs.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler le développement limité à l'ordre n de la fonction exponentielle en 0 et en déduire la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}$ lorsque x tend vers 0.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$ converge.

3. Soit ε et X appartenant à $]\,0\,;\,+\infty[$ tels que $\varepsilon \leqslant \mathrm{X}$.

a) Établir : $\displaystyle\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{a\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{b\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y$.

b) En déduire $\displaystyle\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y - \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y$.

4. a) Montrer que l'application $h : [\,0\,;\,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

b) En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ln\frac{b}{a}$.

c) Établir, pour tout X de $]\,0\,;\,+\infty[$: $\displaystyle\int_0^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a} - \int_{a\mathrm{X}}^{b\mathrm{X}} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y$.

d) En déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}.$$

Exercice 2 *Étude de produits infinis - D'après Centrale 2024*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit le produit partiel d'ordre n de terme général u_n par

$$\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

On dit que le produit infini de terme général u_n noté $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe ou converge lorsque la suite (P_n) converge, autrement dit lorsque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k$ existe et est finie.

1. Lien avec les séries

a) Montrer que si le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe et est non nul, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

b) Montrer que, si la série de terme général $\ln(u_n)$ converge, alors le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

c) On pose, uniquement dans cette sous-question, $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Étudier la convergence du produit infini de terme général u_n et la convergence de la série de terme général $\ln(u_n)$.

2. Deux premiers exemples

a) Déterminer, en le justifiant, la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

b) Déduire de la première question la convergence des produits infinis

$$\Pi_1 = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \text{ et } \Pi_2 = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right).$$

c) Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$, montrer que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{\mathrm{N}+2}{2\mathrm{N}+2}$ et en déduire la valeur de Π_1.

d) Calculer $\displaystyle\prod_{n=1}^{2\mathrm{N}}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$ pour $\mathrm{N}=1$ et $\mathrm{N}=2$, puis conjecturer la valeur de ce produit pour tout $\mathrm{N} \geqslant 1$.

e) Démontrer la conjecture précédente et en déduire la valeur de Π_2.

3. Formule de Wallis

Dans cette question, on étudie le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$ et on pose $u_n = \dfrac{4n^2}{4n^2-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x.$$

a) Justifier la convergence du produit infini de terme général u_n.

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

c) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

d) Rappeler la formule de Stirling et en déduire : $\mathrm{W}_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

e) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k = (2n+1)\mathrm{W}_{2n+1}^2$.

f) En déduire la valeur[1] du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$.

1. Cette valeur a été donnée pour la première fois par John Wallis en 1656. Comme James Stirling n'avait

Exercice 3 *Une intégrale par l'étude d'une fonction - D'après E3A 2022*
On pose pour tout réel x, losque cela est possible,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$$

1. **Deux résultats préliminaires**
   a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-at\right)\mathrm{d}t$ existe et, lorsqu'elle existe, indiquer sa valeur.
   b) Soit x un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{x^2}$.
2. **Ensemble de définition de *f***
   a) Rappeler un équivalent simple de $\sin(t)$ lorsque t tend vers 0.
   b) Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

   c) Montrer que la fonction $t \longmapsto \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   d) Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. **Dérivées première et seconde de *f***
   Dans cette question, x désigne un réel strictement positif.
   a) Montrer que : $\forall t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t.$
   b) En déduire que les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \longmapsto \sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que ses dérivées s'obtiennent par dérivation des intégrandes :

$$f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \text{ et } f''(x) = \int_0^{+\infty} \sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$$

4. **Une expression explicite de *f"(x)***
   Dans cette question, x désigne à nouveau un réel strictement positif et θ désigne un réel quelconque. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.
   a) Montrer que : $\forall t \geqslant 0, \quad \left|\mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\right| = \mathrm{e}^{-xt}.$
   b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i\theta)t} = 0.$
   c) En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i\theta)t}\mathrm{d}t.$

---

que onze ans à la mort de Wallis, John n'a pas utilisé la formule de James pour établir sa formule. La formule de John est un des produits infinis les plus faciles à mémoriser, puisqu'il s'écrit

$$\frac{2.2}{1.3}\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\cdots = \frac{\pi}{2}.$$

d) En déduire finalement, à l'aide de la formule d'Euler $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, que

$$f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2\left(x^2+4\right)}.$$

5. Une expression explicite de *f(x)*

a) Justifier que : $\forall t > 0, \quad \left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2 \leqslant 1.$

b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$

c) En déduire, pour tout $x > 0$ et à l'aide de l'expression de $f''(x)$ obtenue dans la question précédente, une expression de $f'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

d) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \ln(x^2+4)$.

e) Montrer finalement que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x}{4} \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

6. Valeur de deux intégrales généralisées

a) Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

b) Justifier l'existence et donner la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t.$$