1 Un peu de pratique

Exercice 1 *Étude d'un endomorphisme via sa matrice*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

2. Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?

3. Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?

Exercice 2 *Endomorphisme vérifiant une équation*

1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) En observant les colonnes de A, déterminer le rang, le noyau et l'image de f en donnant une base de chacun d'eux.

b) Calculer A^2. Que peut-on en déduire pour f ?

c) Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires.

d) Quelle est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{C}$ adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$?

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
Soit f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 = 3f$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires.

b) Montrer que dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à cette supplémentarité, la matrice de f est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 3\mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{où } r = \mathrm{rg}(f).$$

Exercice 3 *Matrice d'un endomorphisme nilpotent*

1. Soit

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a) Calculer N^2 et N^3. Que peut-on en déduire pour f ?
On dit que f est *nilpotente d'indice (ou d'ordre) 3.*

b) On pose $e_1 = (1, 0, 0)$. Montrer que $\mathcal{B} = (f^2(e_1), f(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

2. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \geq$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ et φ défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(M)\,A - \mathrm{Tr}\,(A)\,M.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Exercice 5 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \mathrm{Tr}\,(M)\,I_n$.

1. a) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$.

c) φ est-il un automorphisme ?

2. a) Déterminer l'ensemble E_1 des matrices M telles que

$$\varphi(M) = M.$$

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, préciser sa dimension.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des matrices M telles que

$$\varphi(M) = (1-n)M.$$

Justifier qu'il s'agit d'un sous-espace de E, préciser sa dimension.

3. a) Justifier que E_1 et E_2 sont stables par φ, et supplémentaires.

b) Donner la matrice représentant φ dans une base obtenue en concaténant une base de E_1 et une base E_2.

2 Qu'on les appelle projections ou projecteurs, iels sont incontournables !

Exercice 6 *Rang et trace d'un projecteur*

Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que :

$$p \circ p = p.$$

1. a) Démontrer que $\mathrm{Im}(p) = \{u \in E, p(u) = u\}$.

b) Démontrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie n. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}\,(p)$.

Exercice 7 *Noyau et image supplémentaires*

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. On suppose de plus que E est de dimension finie et que

$$\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f).$$

a) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f).$$

b) Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.$$

Exercice 8 *Projections et décomposition*

Soit $f_1, \ldots, f_n$ n endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E tels que

$$f_1 + \cdots + f_n = id_E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j,\ f_i \circ f_j = 0.$$

1. Montrer que chaque f_i est un projecteur.

2. Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i) = E$.

3. Que peut-on dire de f_1 et f_2 lorsque $n = 2$?

3 Polynômes et algèbre linéaire

Exercice 9 *Polynôme annulateur et inversion*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et en déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.

b) En déduire l'inversibilité de M ainsi que son inverse.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit P un polynôme annulateur de M.
Montrer que si $P(0) \neq 0$, alors M est inversible et M^{-1} est une combinaison linéaire de puissance (d'exposant positif) de M.

Exercice 10 *Lemme des noyaux et diagonalisation*
Soit a et b deux scalaires distincts de $\mathbb{K}$ et

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} + ab.$$

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E.
On suppose que $\mathrm{P}(u) = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}}) \subset \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - a.id_{\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b.id_{\mathrm{E}}) = \mathrm{E}$. *On pourra exploiter la relation* $\dfrac{1}{b-a}\big((\mathrm{X}-a) - (\mathrm{X}-b)\big) = 1$.
3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant u est diagonale. On dit que u est *diagonalisable.*
4. Les sous-espaces $\mathrm{Im}(u - a.id_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{Im}(u - b.id_{\mathrm{E}})$ sont-ils supplémentaires ?
5. *Application*
   Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 11 *Polynôme annulateur et bijectivité*
Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et φ défini sur E par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \varphi(\mathrm{P}) = \mathrm{P} - \mathrm{P}'.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer un polynôme annulateur non nul de φ.
3. Justifier que φ est bijectif et déterminer φ^{-1} à l'aide des puissances de φ, puis en explicitant $\varphi^{-1}(\mathrm{P})$ en fonction de P.
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ par $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Exercice 12 *Sur une présentation algébrique de l'interpolation de Lagrange*
Dans cet exercice, on « oublie » le cours consacré à l'interpolation de Lagrange et on le redécouvre par une autre approche.
Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.
Soit

$$f : \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{K}^{n+1}, \mathrm{P} \mapsto \big(\mathrm{P}(a_0), \mathrm{P}(a_1), \ldots, \mathrm{P}(a_n)\big).$$

1. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Soit $b = (b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Justifier qu'il existe un unique polynôme P_b de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que
$$\forall i \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!], \quad \mathrm{P}_b(a_i) = b_i.$$
3. On note $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
   Expliciter les polynômes $\mathrm{L}_i = f^{-1}(e_i)$.
4. Déterminer les coordonnées de P_b dans la base $(\mathrm{L}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
5. **a)** Que dire d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ prenant $n+1$ fois la même valeur ?
   b) Calculer $f\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i\right)$ et en déduire $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i$.