Exercice 1 *Étude d'un endomorphisme*

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. a) Déterminer les réels λ tels que $\det(M - \lambda I_3) = 0$. On note α et β ces réels, avec $\alpha < \beta$.
   b) En déduire le rang, l'image et le noyau de f.
2. a) Déterminer $F = \mathrm{Ker}(f - \alpha\, id_E)$ et donner un vecteur u engendrant F.
   b) Montrer que $H = \mathrm{Vect}(u, e_1)$ est stable par f.
3. a) Déterminer $G = \mathrm{Ker}(f - \beta\, id_E)$ et donner un vecteur v engendrant G.
   b) G est-il stable par f ?
4. Montrer que G et H sont supplémentaires.
5. Déterminer une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice N de f est diagonale par blocs vérifiant :

$$N = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution (**Ex.1 –** *Étude d'un endomorphisme*)

1. a) $\det(M - \lambda I_3) = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.
   b) Donc $\det(M) \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M) = 3$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3,$$

et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

f est un automorphisme.

2. a) $M + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, de rang 2 avec $2C_1 + C_3 = 0$ donc

$$F = \mathrm{Ker}(f + id_E) = \mathrm{Vect}((2,0,1)) = \mathrm{Vect}(u).$$

   b) $f(u) = -u \in H$ car $(f + id_E)(u) = 0$ et $f(e_1) = (1,0,1) = u - e_1 \in H$, donc H est stable par f.
3. a) $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ de rang 2 avec $C_1 + C_2 + C_3 = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f - 2id_E) = \mathrm{Vect}((1,1,1)) = \mathrm{Vect}(v)$.
   b) $G = \mathrm{Vect}(v)$ et $f(v) = 2v \in G$ donc G est stable par f.
4. $\det(v,u,e_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ donc (v,u,e_1) est une base de E. Comme c'est la concaténée d'une base de G et d'une base de H, G et H sont supplémentaires.
5. Prenons $\mathcal{C} = (v,u,e_1)$ base adaptée à la supplémentarité de G et H.

Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = (1)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.