Exercice 1 *Centrale 2000, E3A 2005 et CCP 2007 - PC*

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Dans tout ce problème, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = S_n - \ln(n)$$

I – Preuves de l'existence de γ, constante d'Euler

1. a) Établir : $\forall x \in [0;1[,\quad x + \ln(1-x) \leq 0 \quad \text{et} \quad x - \ln(1+x) \geq 0.$

b) On pose, pour tout $n \geq 2$, $v_n = S_{n-1} - \ln(n)$.
Montrer que u et v convergent, vers une même limite.
On note, dans toute la suite du problème, γ cette limite, appelée *constante γ d'Euler*.

2. Dans cette question, on établit l'existence de γ d'une autre façon que dans la question précédente.

a) Montrer la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$.

b) Que peut-on en déduire pour la suite u ?

3. Montrer que

$$S_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

4. Déduire de ce qui précède un équivalent simple de S_n.

II – Expression de γ comme somme d'une série

5. a) Déterminer un équivalent de $\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

III – Intervention de γ dans une somme de série

Dans cette partie, on étudie la série de terme général t_n défini par

$$\forall n \geq 2, \quad t_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n},$$

et on pose

$$\forall N \geq 2, \quad T_N = \sum_{n=2}^{N} t_n.$$

6. a) Justifier que la série $\sum_{n\geq 2} t_n$ converge.

b) Est-elle absolument convergente ?

7. a) Établir successivement

$$\forall n \geq 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t \leq \frac{\ln(n)}{n}, \text{ et } \forall n \geq 4, \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t} \mathrm{d}t$$

b) On pose, pour tout $N \geq 3$, $a_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\left(\ln(N)\right)^2}{2}$.
Montrer que $(a_N)_{N\geq 3}$ est décroissante, et minorée.

c) Montrer que, pour tout $N \geq 3$,

$$T_{2N} = \ln(2) S_N + a_N - a_{2N} + \frac{\ln^2 N}{2} - \frac{\ln^2(2N)}{2}.$$

d) En déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ en fonction de γ et de $\ln(2)$.

IV – Quelques expressions de γ sous forme d'une intégrale

8. Montrer que

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

9. Montrer que

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2}\mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \dfrac{1}{x}$.

10. **a)** Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.
On appelle encore φ le prolongement ainsi obtenu.

b) Justifier que φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x$.

11. Dans cette question, $a \in]0\,;\,+\infty[$ et $n \geq 2$, et on pose

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que $\mathrm{I}_n(a)$ existe.

b) Montrer successivement

$$\mathrm{I}_n(a) = \int_a^{na} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

12. Montrer que, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln(n)$.

13. **a)** Montrer successivement que, pour $n \geq 2$,

$$\mathrm{S}_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-t^{n-1}}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$$

b) Justifier que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

14. Montrer que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x.$$

Solution (**Ex.1 –** *Centrale 2000, E3A 2005 et CCP 2007 - PC*)

I – Preuves de l'existence de γ, constante d'Euler

1. **a)** $x \mapsto x + \ln(1-x)$ est décroissante sur $[1\,;\,0[$ et nulle en 0 donc négative, $x \mapsto x - \ln(1+x)$ est croissante sur $[1\,;\,0[$ et nulle en 0 donc positive.

b) $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et les inégalités précédentes entraînent que u décroît et v croît. u et v sont adjacentes donc convergent, vers une même limite γ.

2. Dans cette question, on établit l'existence de γ **d'une autre façon** que dans la question précédente.

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{-1}{n(n+1)} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. donc par domination, puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

b) Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge, u converge (c'est du cours).

3. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ donc $u_n = \gamma + o(1)$ donc $\mathrm{S}_n - \ln(n) = \gamma + o(1)$ donc $\mathrm{S}_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

4. $\dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln n} = \dfrac{u_n + \ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{u_n}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.
Donc $\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

II – Expression de γ comme somme d'une série

5. **a)** $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

b) On en déduit déjà que la somme proposée existe par le critère de négligeabilité.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=H_N-\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n))=H_N-\ln(N+1)=H_N-\ln N-\ln\frac{N+1}{N}=u_N-\ln\frac{N+1}{N}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\gamma+0$ donc $\displaystyle\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.

III – Intervention de γ dans une somme de série

6. a) Pour $f:[2\,;+\infty[\to\mathbb{R}, t\mapsto\dfrac{\ln t}{t}$, $f'(t)=\dfrac{1-\ln(t)}{t^2}\leq 0$ dès que $t\geq e$ donc $(t_n)_{n\geq 3}$ est décroissante de limite nulle.
Par le théorème des séries alternés, $\displaystyle\sum_{n\geq 3}t_n$ converge, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2}t_n$ aussi.

b) $\forall n\geq 3,\quad |t_n|\geq\dfrac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, $\displaystyle\sum_{n\geq 2}t_n$ n'est pas absolument convergente.

7. a) $\displaystyle\forall n\geq 3, \int_n^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t\leq\frac{\ln(n)}{n}$, et $\displaystyle\forall n\geq 4, \frac{\ln(n)}{n}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$ s'obtient par décroissance de f (cf 16.a)) et croissance de l'intégrale.

b) $\displaystyle\forall N\geq 3,\quad a_{N+1}-a_N=\frac{\ln(N+1)}{N+1}-\frac{1}{2}\left(\ln^2(N+1)-\ln^2(N)\right)$
Or $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\ln^2(N+1)-\ln^2(N)\right)=\left[\frac{1}{2}\ln^2(t)\right]_N^{N+1}=\int_N^{N+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$
Donc par 17.a), $(a_N)_{N\geq 3}$ décroît.
Toujours par 17.a), $\forall N\geq 3$,
$\displaystyle a_N\geq\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\int_3^{N+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t-\frac{\ln^2 N}{2}\geq\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln^2 3}{2}+\frac{\ln^2(N+1)-\ln^2 N}{2}$
$\displaystyle a_N\geq\frac{\ln 2-\ln^2 3}{2}$, donc a est minorée.

c) $\displaystyle T_{2N}=\sum_{n=2}^{2N}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln(2k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=1}^{2N}\frac{\ln(k)}{k}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln(2k)}{2k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\ln 2+\ln k}{k}-a_{2N}-\frac{\ln^2(2N)}{2}=$ $\displaystyle\ln(2)S_N+a_N-a_{2N}+\frac{\ln^2 N}{2}-\frac{\ln^2(2N)}{2}$

d) • Puisque a est décroissante minorée, elle converge et $a_N-a_{2N}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
• $\displaystyle\frac{\ln^2(2N)}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}+\ln 2\ln(N)+\frac{\ln^2 N}{2}$, donc
$\displaystyle\ln(2)S_N+\frac{\ln^2 N}{2}-\frac{\ln^2 2}{2}=\ln(2)(S_n-\ln(N))-\frac{\ln^2 2}{2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\ln(2)\gamma-\frac{\ln^2 2}{2}$
• Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n}=\gamma\ln(2)-\frac{\ln^2 2}{2}$

IV – Quelques expressions de γ sous forme d'une intégrale

8. • Notons que l'intégrande est continue par morceaux et :
$\displaystyle\forall x\geqslant 2, \frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}=\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\lfloor x\rfloor x}$ donc $\displaystyle 0\leqslant\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\lfloor x\rfloor^2}\leqslant\frac{1}{(x-1)^2}$. Comme $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^2}$, l'intégrale proposée existe.
• Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
$\displaystyle\int_1^N\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n)\right)$, et par télescopage des logarithmes
$\displaystyle\int_1^N\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x=S_{N-1}-\ln(N)\underset{N\to+\infty}{=}\ln(N-1)+\gamma+o(1)-\ln(N)\underset{N\to+\infty}{=}\ln\left(\frac{N-1}{N}\right)+\gamma+o(1)\underset{N\to+\infty}{=}\gamma+o(1)$ d'où $\displaystyle\gamma=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\lfloor x\rfloor}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

9. • L'intégrale proposée existe puisque $\displaystyle\forall x\geqslant 1, 0\leqslant\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$.
• Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
$\displaystyle\int_1^N\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{x}-\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{x}-\frac{n}{x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\ln(n+1)-\ln(n)+\frac{n}{n+1}-1\right)$

$\displaystyle\int_1^N \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x = \ln(N) - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1} = \ln(N) - S_N + 1 \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) - \gamma - \ln(N) - o(1) + 1 \underset{N\to+\infty}{=} -\gamma + 1 + o(1)$ d'où $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}\mathrm{d}x$.

10. a) $\varphi(x) = \dfrac{x-(1-\mathrm{e}^{-x})}{x(1-\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{x^2/2+o\left(x^2\right)}{x(1-\mathrm{e}^{-x})} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2}$
φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1/2$.

b) $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $\exists X \in \mathbb{R}^+, \forall x \geq X, 0 \leq \varphi(x) \leq 2$, φ est bornée sur $[X\,;+\infty[$ et comme φ est continue sur $[0\,;X]$, elle est aussi bornée sur $[0\,;X]$. Donc φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\varphi(x)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$, et par b), $f(x) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-x})$. Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$, f est intégrable par domination : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x$ existe.

11. a) $I_n(a)$ n'est impropre qu'en $+\infty$ et l'intégrande est $o(\mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$, donc par $I_n(a)$ existe par négligeabilité.

b) Chacune des intégrales ci-après existent par le même argument que précédemment ($o(\mathrm{e}^{-x})$) :
$\displaystyle I_n(a) = \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x.$
Avec le changement de variable $u = nx$ bijectif $\mathcal{C}^1$ strictement croissant dans la seconde intégrale :
$\displaystyle I_n(a) = \int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{na}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u = \int_a^{na}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$
$\displaystyle I_n(a) = \int_a^{na}\frac{1-(1-\mathrm{e}^{-x})}{x}\mathrm{d}x = \int_a^{na}\frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_a^{na}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \ln(n) - \int_a^{na}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

12. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})/x & \text{si } x > 0,\\ 1 & \text{si } x = 0\end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit F une de ses primitives, donc continue en 0.

$I_n(a) = \ln(n) - F(na) + F(a) \xrightarrow[a\to0]{} \ln(n) - F(0) + F(0) = \ln n$, ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln(n)$.

13. a) $\displaystyle S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^1\sum_{k=0}^{n-2}t^k\mathrm{d}t$
$\displaystyle S_{n-1} = \int_0^1\frac{1-t^{n-1}}{1-t}\mathrm{d}t.$
Posons alors $t :]0\,;+\infty[\to]0\,;1[, x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ changement $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement décroissant.
$\displaystyle S_{n-1} = \int_{+\infty}^0\frac{1-\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}(-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

b) On soustrait les deux résultats précédents :
$$\begin{aligned}S_{n-1} - \ln(n) &= \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\varphi(x)\mathrm{d}x \text{ car ces intégrales existent (cf. 18.a))}\end{aligned}$$

- $S_{n-1} - \ln(n) = S_{n-1} - \ln(n-1) + \ln\dfrac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$
- $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\varphi(x)\mathrm{d}x\right| \leq K\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x \leq \dfrac{K}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où K majore $|\varphi|$.

Donc en passant à la limite dans la relation précédente :
$$\gamma = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

14. $\displaystyle\gamma = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ invite à poser $u = \mathrm{e}^{-x}$, changement de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant donc bijectif de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;1[$.
On obtient, avec $x = -\ln(u)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{d}u}{u}$:
$\displaystyle\gamma = \int_0^1\left(\frac{u}{1-u} - \frac{u}{-\ln(u)}\right)\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int_0^1\frac{1}{1-u} + \frac{1}{\ln(u)}\mathrm{d}u$ donc
$$\gamma = \int_0^1\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x.$$