

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 2024 Principal

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES PILOTE DE LIGNE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 Heures
Coefficient : 1

Cette épreuve comporte :

- 1 page de garde ,
- 2 pages d'avertissement,(recto-verso)
- 16 pages de texte (recto-verso) numérotées de 4 à 19

**TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE EST INTERDIT
(EN PARTICULIER L'USAGE DE LA CALCULATRICE)**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve de mathématiques de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé informatiquement.

- 1) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un stylo à bille ou feutre à encre foncée : bleue ou noire. Vous devez **cocher** lisiblement la case en vue de la lecture informatisée de votre QCM.
- 2) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté informatiquement et de ne pas être corrigé.
- 3) Si vous voulez **modifier** votre réponse, **n'utilisez pas de correcteur** mais indiquez la nouvelle réponse sur la 2^{ème} ligne.
- 4) Si vous voulez **annuler** votre réponse, vous devez cocher la case « Ann ». Dans ce cas-là, aucune réponse ne sera prise en compte.
- 5) Cette épreuve comporte 36 questions, certaines, de numéros consécutifs, sont liées. La liste des questions liées est donnée au début du texte du sujet.
Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de la ligne 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

- 6) A chaque question numérotée entre 1 et 36, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 37 à 80 sont neutralisées).
Chaque ligne comporte 5 cases A, B, C, D, E.
Pour chaque ligne numérotée de 1 à 36, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :
 - ▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question, *la ligne correspondante doit rester vierge.*
 - ▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse, *vous devez cocher l'une des cases A, B, C, D.*
 - ▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes, *vous devez cocher deux des cases A, B, C, D et deux seulement.*
 - ▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées A, B, C, D n'est bonne, *vous devez alors cocher la case E.*

En cas de réponse fausse, aucune pénalité ne sera appliquée.

7) EXEMPLES DE RÉPONSES

Question 1 : $1^2 + 2^2$ vaut :

- A) 3 B) 5 C) 4 D) -1

Question 2 : le produit (-1) (-3) vaut :

- A) -3 B) -1 C) 4 D) 0

Question 3 : Une racine de l'équation $x^2 - 1 = 0$ est :

- A) 1 B) 0 C) -1 D) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :

1 -

<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2 -

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3 -

<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A	B	C	D	E
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Sujet principal 2024

QUESTIONS LIÉES

3-4

5 à 8

12 à 15

16 à 18

22-23

32-33

PARTIE I

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$ et $u_n = S_{2n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

A) Si n est pair, $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$

B) $u_n = \sum_{k=1}^n (2k)^2 - \sum_{k=1}^n (2k+1)^2$

C) $S_{2n} > 0$ et $S_{2n+1} < 0$

D) $u_{n+1} = u_n - (2n+1)^2$

Question 2

A) Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n-1}$

B) Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\binom{2n}{n} > \binom{2n+1}{n+1}$

C) Pour tout $n \geq 3$ et tout $2 \leq k \leq n-2$ on a
 $\binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k}$

D) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} < 4^n$

PARTIE II

Question 3

Soit l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - 4\bar{z} - 4 = 0$

- A) Cette équation admet exactement deux solutions
- B) Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R}
- C) Cette équation admet une unique solution dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
- D) z solution implique $(z - \bar{z})(z + \bar{z} + 4) = 0$

Question 4

L'ensemble des solutions de l'équation précédente est

- A) $\{2 - 2\sqrt{2} ; 2 + 2\sqrt{2}\}$
- B) $\{2 - 2\sqrt{2} ; 2 + 2\sqrt{2} ; 2 - 2\sqrt{2}i ; 2 + 2\sqrt{2}i\}$
- C) $\{2 - 2\sqrt{2} ; 2 + 2\sqrt{2} ; -2 - 2\sqrt{2}i ; -2 + 2\sqrt{2}i\}$
- D) $\{-2 - 2\sqrt{2}i ; -2 + 2\sqrt{2}i\}$

Question 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\omega_n = e^{i\frac{\pi}{n}}$

- A) $\{\omega_n^k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est l'ensemble des racines du polynôme $X^{2n} - 1$
- B) $\omega_n \in \mathbb{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- C) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pair, $P = \prod_{k=1}^n (X - \omega_n^k)$ appartient à $\mathbb{R}[X]$
- D) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que ω_n^k soit racine de $X^n + 1$

Question 6

Pour tout $n \geq 1$:

$$A) \sum_{k=1}^n \omega_n^k = 0$$

$$B) \sum_{k=1}^n \omega_n^k = \frac{1 - \omega_n^n}{1 - \omega_n}$$

$$C) (1 - \omega_n^k)(1 - \bar{\omega}_n^k) = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$D) \prod_{k=1}^n \omega_n^k = (-1)^n$$

Question 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A) \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} = \frac{2\bar{\omega}_n}{1 - \bar{\omega}_n} \text{ si et seulement si } n = 1$$

$$B) \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} + \frac{2\bar{\omega}_n}{1 - \bar{\omega}_n} = 2$$

$$C) \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} \times \frac{2\bar{\omega}_n}{1 - \bar{\omega}_n} = 4$$

$$D) \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Question 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n |1 - \omega_n^k|^2$. Pour tout $n \geq 1$:

$$A) S_n \leq 2n$$

$$B) S_n = 2n - \frac{2\omega_n}{1 - \omega_n} - \frac{2\bar{\omega}_n}{1 - \bar{\omega}_n}$$

$$C) S_n = \sum_{k=1}^n (1 - \omega_n^k) \times \sum_{k=1}^n (1 - \bar{\omega}_n^k)$$

$$D) S_{n+1} = S_n + |1 - \omega_n^{n+1}|^2$$

PARTIE III

Pour un réel a quelconque $[a]$ désigne la partie entière de a .

Question 9

Soit l'équation $(E_1) : [2x] = x$

- A) (E_1) a les mêmes solutions que $[2x] = [x]$
- B) (E_1) admet plusieurs solutions
- C) x solution de (E_1) implique $x \in \mathbb{Z}$
- D) x solution de (E_1) implique $2x - 1 \leq x < 2x$

Question 10

Soit l'équation $(E_2) : [2x] = x^2$

- A) (E_2) admet une infinité de solutions
- B) x solution de (E_2) implique $x \in [0 ; 2]$
- C) x solution de (E_2) est équivalent à $x^2 \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$
- D) x solution de (E_2) implique $x \geq 0$

Question 11

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : [2x] = x^n$ et S_n l'ensemble de ses solutions

- A) x solution de (E_n) implique $2x - 1 < x^n \leq 2x$
- B) Si n est pair et $n \geq 4$: $S_n = \left\{0 ; 2^{\frac{1}{n}} ; 3^{\frac{1}{n}}\right\}$
- C) Il existe un entier $n \geq 4$ pair tel que (E_n) admette au moins une solution dans $] -\infty ; 0[$
- D) Il existe une suite $(x_n)_n$ avec $x_n \in S_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n| = +\infty$

PARTIE IV

Question 12

Soit l'équation différentielle $xy' + y = 0$ d'ensemble de solutions S_H sur $]0; +\infty[$

A) $S_H = \left\{ f_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda}{x} e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

B) S_H est un espace vectoriel de dimension 2

C) Si $y \in S_H$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0$

D) $y \in S_H \Leftrightarrow xy'' + 2y' = 0$

Question 13

Soit f définie sur $] -2; 2[$ par $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Une primitive F de f est définie sur $] -2; 2[$ par :

A) $F(x) = 2 \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

B) $F(x) = \frac{1}{2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$

C) $F(x) = x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$

D) $F(x) = x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Question 14

Si y est une solution quelconque de $xy' + y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $]0; 2[$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, au voisinage de 0, on ait

A) $y(x) = \frac{\lambda + 1}{x} + \frac{3}{8}x + o(x^2)$

B) $y(x) = \frac{\lambda + 2}{x} + \lambda + \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda^2}{4}x^2 + o(x^2)$

C) $y(x) = \frac{\lambda + 2}{x} + \frac{1}{4}x + o(x^2)$

D) $y(x) = \lambda + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Question 15

On en déduit que pour l'équation $xy' + y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

A) Il n'y a aucune solution définie sur $] - 2 ; 2[$

B) Il y a une infinité de solutions définies sur $] - 2 ; 2[$

C) Il y a une unique solution définie sur \mathbb{R}

D) Toute solution y définie sur $] - 2 ; 2[$ vérifie $y'(0) = \frac{1}{4}$

PARTIE V

Question 16

Pour toute suite $(u_n)_n$ à termes dans $]0 ; 1[$

A) Les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \ln(1 + u_n)$ sont de même nature

B) La série $\sum_n \ln(1 - u_n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n \ln(1 - u_k)$ est majorée

C) Les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n(1 - u_n)$ sont de même nature

D) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n \ln(1 + u_n)$ convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + u_n)$

Question 17

Pour $a \in]0 ; 1[$ on pose $p_n(a) = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k})$ et $q_n(a) = \prod_{k=0}^n (1 - a^{2^k})$

A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(a) = +\infty$ car $\frac{p_{n+1}(a)}{p_n(a)} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

B) $(p_n(a))_n$ converge vers une limite $l(a) \in]1 ; +\infty[$ car $(\ln(p_n(a)))_n$ converge vers une limite $L(a) > 0$

C) $(q_n(a))$ tend vers 0

D) $(q_n(a))$ tend vers une limite $m(a) > 0$

Question 18

A) $p_n(a) \times q_n(a) = q_{n+1}(a)$

B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(a) = \frac{1+a}{1-a}$

C) Pour tout $n \geq 3$, $q_n(a)$ admet un développement limité à l'ordre 5 lorsque a tend vers 0 qui s'écrit $q_n(a) = 1 - a - a^2 + a^3 - a^4 + a^5 + o(a^5)$

D) Pour tout $n \geq 3$, $q_n(a)$ admet un développement limité à l'ordre 5 lorsque a tend vers 0 qui s'écrit $q_n(a) = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + o(a^5)$

PARTIE VI

Question 19

Soit $P = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2$

- A) 1 est racine de P avec une multiplicité de 3
- B) P admet plusieurs racines réelles distinctes
- C) Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 12X - 12$
- D) Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est $R = 2X^2 - 3X + 1$

Question 20

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $E_n = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket P^{(k)}(1) = 1 \}$

- A) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in E_n \Leftrightarrow P' \in E_{n-1}$
- B) $P \in E_n$ si et seulement si le reste R de la division euclidienne de P par $(X - 1)^{n+1}$ appartient à E_n
- C) $P_0 = \sum_{k=0}^n \frac{(X - 1)^k}{k!}$ est l'unique élément de E_n
- D) $F_n = \{ P - P_0 \mid P \in E_n \}$ est un espace vectoriel

PARTIE VII

Dans cette partie E est un espace vectoriel non trivial. Pour une famille (x_1, x_2, \dots, x_n) de vecteurs de E on note $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ l'espace vectoriel engendré par cette famille ; $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E est l'application identité de E dans E . On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(M)$ est le déterminant de M et $\text{rg}(M)$ est le rang de M . La matrice I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 21

Soit $F = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \}$ et $G = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$

- A) $F \cup G$ est un espace vectoriel de dimension 3
- B) $F \cap G$ est un espace vectoriel de base $((2; 0; 2))$
- C) $F + G = \mathbb{R}^3$
- D) Pour tout $(a; b; c) \in F \setminus \{0\}$, $\text{Vect}((a; b; c))$ et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3

Question 22

Pour $t \in \mathbb{R}$, $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 2 & t \\ t & 4 & 4 \end{pmatrix}$

- A) $\det(M_t) = 0 \Leftrightarrow t = -4$
- B) $\forall t \in \mathbb{R}, \text{rg}(M_t) \in \{2; 3\}$
- C) Si $t = 0$, M_t est inversible
- D) Il existe un réel t tel que $\dim(\text{Ker}(M_t)) = 2$

Question 23

Le système d'inconnues x, y, z :
$$\begin{cases} x + ty + 2z = a \\ x + 2y + tz = b \\ tx + 4y + 4z = c \end{cases}$$

- A) admet une solution unique ou une infinité de solutions suivant la valeur de t
- B) admet des solutions lorsque $t = -4$ si et seulement si $2a + 2b + c = 0$
- C) admet des solutions lorsque $t = 2$ si et seulement si $a = b = 1$ et $c = 2$
- D) admet un ensemble de solutions qui est toujours un espace vectoriel s'il est non vide

Question 24

Pour tous hyperplans H_1, H_2, H_3 deux à deux distincts d'un espace vectoriel E de dimension $d > 3$

- A) $H_1 \oplus H_2 = H_1 \oplus H_3 = H_2 \oplus H_3 = E$
- B) $H_1 + (H_2 \cap H_3) = E$
- C) $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = d - 3$
- D) $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = d - 2$

Question 25

$f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f \neq 0$ et $f \circ f = 2f$

- A) Cela revient à $f = 2Id_E$
- B) $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$
- C) $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \text{Im}(f)$
- D) Il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que λf soit une projection

Question 26

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N \neq 0$, $N^3 = 0$ et $A = I_n + N$

- A) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k \in \text{Vect}(I_n, A, A^2)$
- B) A est inversible et $A^{-1} = A^2 + 3A + I_n$
- C) $A^4 = I_n + 4N + 8N^2$
- D) Il existe un unique $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = X$

Question 27

Soit $A = P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P \in GL_3(\mathbb{R})$

A) $(A - I_3)^2 = 0$

B) Il existe un unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec a et b non nuls

C) Si $M = P(A - I_3)P^{-1}$ alors $M^3 = 0$

D) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & -k & k+1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Question 28

Soit le déterminant $D(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & ac \\ b & c & bc \end{vmatrix}$. Pour tous réels a, b, c on a :

A) $D(a, b, c) = D(c, b, a)$

B) $D(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $b = c$

C) $D(a, b, c) = (a - c)(b - c)c$

D) $D(a, b, c) = (a - b)(b - c)(c - a)$

PARTIE VIII

L'espace euclidien \mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et de la norme qui y est associée notée $\|\cdot\|$, la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 étant alors orthonormée.

Question 29

- A) $(e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3
- B) $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \|u + v\|^2 \geq \frac{1}{4}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\|v\|^2$
- C) $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2, \|u + v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow (u|v) = 0$
- D) Si pour $u \in \mathbb{R}^3$ donné $(e_1 + u, e_2 + u, e_3 + u)$ est une base orthogonale alors elle est orthonormale

Question 30

p est la projection orthogonale sur $H = \{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0 \}$

- A) $p((x; y; z)) - (x; y; z) \in \text{Ker}(p)$
- B) $p((1; 1; 1)) = (1; 2; 0)$
- C) $\text{Ker}(p) = \text{Vect}((2; -1; 1))$
- D) Il existe un unique $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $p(u) = (0; 1; 1)$

Question 31

Pour $\alpha \in]0; \pi[$ on pose $u_\alpha = \cos(\alpha) e_1 + \sin(\alpha) e_3$ et $D_\alpha = \text{Vect}(u_\alpha)$.
 p_α est la projection sur $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ parallèlement à D_α

- A) Pour tout $\alpha \in]0; \pi[$, p_α n'est pas une projection orthogonale
- B) Pour tout $\alpha \in]0; \pi[$, $p_\alpha(e_3) = -\sin(\alpha) e_1$
- C) Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $(p_\alpha(x)|x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(p_\alpha)$
- D) Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ l'ensemble $G = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|p_\alpha(x)\| = \|x\|\}$ contient un espace vectoriel de dimension 2 autre que F

PARTIE IX

Une urne contient au départ huit boules numérotées de 1 à 8, les boules 1,2,3 sont rouges et les autres sont noires. Il est équiprobable de tirer n'importe laquelle de ces boules. On tire successivement cinq boules soit avec remise -c'est-à-dire que chaque boule tirée est remise dans l'urne avant tirage de la suivante-, soit sans remise dans le cas où chaque boule tirée est définitivement retirée de l'urne.

Question 32

- A) La probabilité que sur les cinq boules tirées exactement trois soient rouges étant p_1 dans le cas sans remise et p_2 avec remise on a $\frac{p_1}{p_2} = \frac{8^4}{7 \times 6 \times 5 \times 3^3}$
- B) Dans le cas sans remise, la probabilité que les trois premières boules tirées soient rouges n'est pas identique à la probabilité que les trois dernières boules tirées soient rouges
- C) Dans le cas sans remise la probabilité que sur les cinq boules tirées trois soient rouges est $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}}$
- D) Dans le cas du tirage de cinq boules avec remise, la probabilité que chaque boule tirée soit de couleur différente de la précédente est $\frac{3^3 \times 5^2}{8^5}$

Question 33

Chaque boule rouge tirée rapporte deux points, chaque boule noire enlève un point. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus après tirage sans remise de cinq boules.

- A) $E(X) = \frac{6 \times \binom{5}{2} + 4 \times \binom{5}{3} + 2 \times \binom{5}{4}}{\binom{8}{5}}$
- B) X peut prendre toutes les valeurs de $[-5 ; 4]$
- C) $E(X) = \frac{35}{\binom{8}{5}}$
- D) $E(X) \leq 0$

On lance n fois, avec $n \geq 2$, une pièce de monnaie équilibrée. Soient les évènements A : « on obtient au plus une fois face » et B : « on obtient au moins une fois face et au moins une fois pile »

Question 34

- A) Quel que soit $n \geq 2$, $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- B) Quel que soit $n \geq 2$, $P(A \cap B) = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- C) Quel que soit $n \geq 2$, A et B ne sont pas indépendants
- D) \bar{A} est « on obtient au moins une fois face »

Un virus est susceptible d'infecter les habitants d'une grande ville. Certains individus infectés peuvent rester chez eux, d'autres doivent être hospitalisés du fait de leur état. Un vaccin existe contre ce virus et 90% des habitants sont vaccinés. On constate que 50% des personnes hospitalisées à cause du virus étaient préalablement vaccinées. On note, pour un habitant choisi au hasard, H l'évènement « la personne est hospitalisée à cause du virus » et V l'évènement « la personne est vaccinée ».

Question 35

- A) H est indépendant de V
- B) $P_V(H) = P_{\bar{V}}(H) = 0,5$
- C) Un habitant a neuf fois plus de chances d'être hospitalisé à cause du virus s'il n'est pas vacciné que s'il l'est
- D) Un habitant a dix fois plus de chances d'être hospitalisé à cause du virus s'il n'est pas vacciné que s'il l'est

Un questionnaire comporte 20 questions avec pour chacune quatre affirmations A, B, C et D à cocher dont exactement une est vraie. Cocher l'affirmation correcte rapporte 1 point, en cocher une autre n'enlève ni ne rapporte aucun point. Un candidat coche au hasard une affirmation par question, on note X le nombre de points qu'il obtient au questionnaire.

Question 36

- A) X suit une loi uniforme
- B) $P(X = k + 1) \geq P(X = k) \Leftrightarrow k \leq 4,25$
- C) La note la plus probable du candidat est $E(X - 1)$
- D) $P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$