Le soin, la clarté et la précision de la rédaction rentreront pour une large part dans l'évaluation. On pourra admettre la réponse à une question **à condition de le mentionner explicitement**.

Merci d'encadrer les réponses finales à chaque question. Durée 4 heures

Exercice 1 – D'après E3A - PC - 2022

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. (a) Montrer que, pour tout n de$\mathbb{N}$, $|u_{n+2}| = \dfrac{n+1}{n+2}|u_n|$.

(b) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.

(c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est-elle absolument convergente ?

3. (a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

(b) En déduire la valeur de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$.

4. On pose, pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = \left(-\cos(t)\right)^n$ et $\mathrm{V}_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2 – D'après E3A - 2020 - PC

Les questions 6, 7 et 8 de cet exercice sont **indépendantes entre elles**. On peut par exemple étudier la question 7 sans avoir abordé la question 6.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} \neq \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{M} \neq \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_n$, vérifiant la relation :

$$2\mathrm{M}^2 = 3\mathrm{M} - \mathrm{I}_n.$$

Soit $\mathrm{A} = \mathrm{M} - \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{B} = \mathrm{M} - \dfrac{1}{2}\mathrm{I}_n$.

5. Calculer AB et BA.

6. (a) On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^k \in \mathrm{F}$.

(b) Déterminer la dimension de F et en donner une base.

(c) Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices c'est-à-dire que

$$\forall (\mathrm{C}, \mathrm{D}) \in \mathrm{F}^2, \quad \mathrm{CD} \in \mathrm{F}.$$

(d) Justifier que $\mathcal{B} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

(e) Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $\mathrm{T}^2 = \mathrm{M}$.

7. Soit k un entier naturel.

(a) Donner un polynôme P annulateur de M de degré 2 et préciser ses racines λ et μ.

(b) Justifier l'existence de deux réels α_k et β_k et d'un polynôme réel Q tels que

$$\mathrm{X}^k = \mathrm{QP} + \alpha_k \mathrm{X} + \beta_k \qquad (\heartsuit).$$

(c) Déterminer α_k et β_k en évaluant ($\heartsuit$) pour X valant λ et X valent μ.

(d) En déduire une expression de M^k en fonction de k, M et I_n.

(e) Cette expression est-elle valable pour $k = -1$?

8. On note $0_{n,1}$ la colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que, pour tout matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\ker(\mathrm{N}) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \mathrm{NU} = 0_{n,1}\}$.

(a) Montrer que $\ker(\mathrm{A}) \cap \ker(\mathrm{B}) = \{0_{n,1}\}$.

(b) En exploitant $-2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$, montrer que $\ker(\mathrm{A}) + \ker(\mathrm{B}) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(c) Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
Justifier que

$$\ker(\varphi - id) \oplus \ker\left(\varphi - \frac{1}{2} id\right) = \mathbb{R}^n.$$

(d) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice représentant φ est diagonale.

(e) Montrer qu'il existe une matrice inversible T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{MT} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\mathrm{rg(B)}} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{rg(A)}} \end{array}\right)$$

Exercice 3 – D'après E3A - PSI - 2022

Soit n un entier naturel non nul et $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On note id l'endomorphisme identité de E_n.

9. Soit q un réel et r un entier naturel non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.

10. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Justifier que $\Pi(\mathrm{X}) - \Pi(1)$ est divisible par $\mathrm{X} - 1$.

11. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q de E_n tel que :

$$\forall x \neq 1, \quad \mathrm{Q}(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t.$$

On définit ainsi une application $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{Q}$.

12. Prouver que f est un endomorphisme de E_n.

13. Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, $f(\mathrm{X}^k) = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \mathrm{X}^j$.

14. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 2$.

(a) Écrire la matrice A représentant f dans la base canonique de E_2.

(b) f est-il un automorphisme de E_2 ?

(c) Déterminer la matrice représentant f^{-1} dans la base canonique de E_2.

15. **On revient au cas général**, n désigne un entier naturel non nul **quelconque**.
Montrer que f est un automorphisme de E_n et déterminer, pour tout Q de E_n, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de Q et de son dérivé [1].

16. Soit A la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de E_n.
Déterminer A et A^{-1}.

On traitera au choix l'exercice 4-'Sujet A' ci-dessous ou l'exercice 4-'Sujet B' page suivante, MAIS PAS LES DEUX !

Le sujet B est plus long et plus ardu que le sujet A.

Exercice 4-'Sujet A' – D'après E3A - PSI - 2021

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,dt$.

17. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

18. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

19. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

20. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J *que l'on ne cherchera pas à calculer.*

21. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

★★★ *FIN DU SUJET A* ★★★

1. En cas de doute sur la réponse, on pourra admettre pour la suite que $f^{-1}(Q) = Q + (X-1)Q'$

Exercice 4-Sujet B – D'après E3A - 2014 - MP

22. Énoncer précisément le théorème de convergence dominée.

Soit n un entier naturel. On considère la fonction de la variable réelle x définie sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}.$$

23. (a) Démontrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.
    (b) La convergence est-elle uniforme sur $[0;1]$?

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$$

24. Démontrer que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite nulle.
25. Démontrer que :

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{x+1})^3}\mathrm{d}x.$$

26. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
27. Déterminer des nombres réels α_1, α_2 et α_3 tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\mathrm{d}x.$$

28. En déduire des nombres réels α et β que l'on explicitera tels que :

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

★★★ *FIN DU SUJET B* ★★★