1 Réduction des endomorphismes, diagonalisation des matrices carrées

1.1 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi
$$\exists u \in \mathrm{E}, u \neq 0 \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$
• $u \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi
$$u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$
• Le **spectre** de f noté $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble des ses valeurs propres.
• Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ de f est
$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \{u \in \mathrm{E} / f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}).$$

1.2 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi
$$\exists \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{U} \neq 0 \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$
• $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de la matrice** (parfois appelée colonne propre) $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi
$$\mathrm{U} \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$
• Le **spectre** de M noté $\mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ est l'ensemble des ses valeurs propres.
• Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ de M est
$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

1.3 Le **polynôme caractéristique de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est le polynôme $\chi_f(\mathrm{X}) = \det \mathrm{X} id_{\mathrm{E}} - f$.
• On a, pour E de dimension n, $\chi_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(f)\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det f$.

1.4 Le **polynôme caractéristique de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) = \det \mathrm{X}\mathrm{I}_n - \mathrm{M}$.
• On a, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_\mathrm{M}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det \mathrm{M}$.

1.5 **Cas particulier des matrices triangulaires**
• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) $\mathrm{T} = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ses coefficients diagonaux :
$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{t_{i,i} / i \in [\![1\,;\, n]\!]\}.$$
• Son polynôme caractéristique est alors $\chi_\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - t_{i,i})$.

1.6 **Caractérisation des valeurs propres** d'un endomorphisme
Il y a équivalence entre :
• $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$
• $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_\mathrm{E}) \neq \{0\}$
• $\mathrm{rg}(f - \lambda id_\mathrm{E}) < \dim(\mathrm{E})$
• $\chi_f(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de f).

1.7 **Caractérisation des valeurs propres** d'une matrice d'ordre n
Il y a équivalence entre :
• $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$
• $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible
• $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$
• $\chi_\mathrm{M}(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de M).

1.8 **Multiplicité d'une valeur propre**
On appelle multiplicité de la valeur propre λ notée $\mu(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

1.9 **Polynômes et éléments propres**
① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Alors :
(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^k(u) = \lambda^k u$,
(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\varphi)(u) = \mathrm{P}(\lambda) u$. [Remarque : $\mathrm{P}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]
② Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mathrm{U}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}$. Alors :
(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k \mathrm{U} = \lambda^k \mathrm{U}$,
(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U}$. [Remarque : $\mathrm{P}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

1.10 **Polynômes annulateurs et valeurs propres**
① Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors les valeurs propres de φ sont parmi les racines de P.
② Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les valeurs propres de M sont parmi les racines de P.

1.11 **Théorème de Cayley-Hamilton**
① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $\chi_\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
② Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0_n$.

1.12 **À propos des sous-espace propre** version endomorphisme
• Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $\dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f - \lambda id_\mathrm{E})$.
• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

1.13 **À propos des sous-espace propre** version matrice
• Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)$.
• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

1.14 **Condition suffisante de diagonalisabilité**
• Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f un endomorphisme de E. Si $Card(\mathrm{Sp}(\mathrm{F})) = dim(\mathrm{E})$, alors f est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.
• Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $Card(\mathrm{Sp}(\mathrm{M})) = n$, alors M est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.
• Si χ_f (resp. χ_M) est scindé à racines simples, alors f (resp. M) est diagonalisable.

1.15 **Théorème général de diagonalisabilité** version endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit f un endomorphisme de E. Il y a équivalence entre :

- f est diagonalisable ;
- il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;
- les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E ;
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = \dim(\mathrm{E})$;
- χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de f.

1.16 **Théorème général de diagonalisabilité** version matrice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

- M est diagonalisable ;
- il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de colonnes propres de M ;
- les sous-espaces propres de M sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = n$;
- χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;
- il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de M.

1.17 La matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

- M est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

1.18 Un endomorphisme φ de E est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant φ est triangulaire.

- φ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Dans un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (de dimension finie) tout endomorphisme est trigonalisable.

1.19 **Cas des matrices symétriques réelles**

Toute matrice symétrique réelle S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles et χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$.

Compétences et cours évalués en colle la semaine du 18 novembre :

I. Questions de cours : les points 1.1 à 1.10 de ce polycopié ;

II. Sur un exemple concret en dimension 3 ou 4, savoir déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Au préalable, savoir déterminer une matrice représentant l'endomorphisme si celle-ci n'est pas donnée.

III. Savoir traduire qu'une valeur est valeur propre ou qu'un vecteur est vecteur propre dans des exercices plus généraux.

Les théorèmes et conditions de diagonalisabilité ne sont pas à connaître, ni les propriétés liés à la multiplpicité.