Exercice 1 *Spectre de l'automorphisme réciproque*

Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Justifier que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$.

Exercice 2 *Valeur propre nulle et injectivité*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathrm{E} \neq \{0\}$.

1. Montrer que : $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow f$ injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $0 \in \mathrm{Sp}(f^n) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
3. On suppose f nilpotent. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice 3 *L'opérateur « décalage »*

Soit $\mathrm{E} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$ et $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, u \mapsto v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Δ.

Exercice 4 *Du côté des projections et des symétries*

Soit F et G deux sous-espaces non triviaux supplémentaires dans un espace E de dimension finie. Soit p et s respectivement la projection sur F respectivement la symétrie d'axe F tous deux de direction G.

En exploitant les relations $p^2 = p$ et $s^2 = id_{\mathrm{E}}$, déterminer les éléments propres de p et s et justifier qu'ils sont diagonalisables.

Exercice 5 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$.

Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 6 *Matrice de rang 1*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $\mathrm{A}^2 = \lambda \mathrm{A}$.
3. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Exercice 7 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$.

Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\varphi)$.

Exercice 8 *Commutant d'une matrice diagonale*

1. Soit $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.
   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.
2. Soit λ et μ deux scalaires distincts et p et q deux entiers naturels non nuls.
   Déterminer les matrices commutant avec $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & \mu \mathrm{I}_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Exercice 9 *Exemple de réduction d'endomorphismes*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; **2.** $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **4.** $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 *Sous espace propre de dimension n-1*

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = n-1$ soit diagonalisable.

Exercice 11 *Matrice à deux paramètres*

Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

Soit $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A.

Exercice 12 *Sommes constantes en ligne ou en colonne*

1. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$.

   Montrer que $s \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.
2. En est-il de même si : $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$?
3. Étudier si
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
   est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A.

Exercice 13 *Calculs explicites en dimension 3*

Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{N} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ \mathrm{L} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 *Matrice à un paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \geq 3$ et $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

i.e. $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1; n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [\![2\,;\, n-2]\!]. \end{cases}$

Étudier, suivant la valeur de α, si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Exercice 15 *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{M}_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
2. Justifier que toute matrice $\mathrm{M}_{a,b,c}$ de F est diagonalisable.
   Que valent $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}_{a,b,c})} \lambda \times \mu(\lambda)$ et $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}_{a,b,c})} \lambda^{\mu(\lambda)}$?
3. Donner deux matrices J et K de E telles que $(\mathrm{I}_3, \mathrm{J}, \mathrm{K})$ soit une base de F.
4. Déterminer les éléments propres de J et K.
5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente les valeurs propres de $\mathrm{M}_{a,b,c}$.

Exercice 16 *Transposition et symétrie*
Soit $n \geqslant 2$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par $f(M) = M^T - M$.

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Exercice 17 *Polynôme annulateur*
Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 3I_5 = 0_5$ et $\mathrm{Tr}(A) = 9$.
Déterminer χ_A.

Exercice 18 *Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$*
Soit $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $f(P)$ défini par
$$f(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On considère la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ définie par
$$P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{n-k}.$$
Calculer, pour tout k de $[\![0\,;\, n]\!]$, $f(P_k)$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f.
L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 19 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*
Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \mathrm{Tr}(M) I_n$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $P = X^2 + (n-2)X + 1 - n$. Calculer $P(\varphi)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant φ dans une base idoine.
4. En déduire $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Exercice 20 *Puissances n-èmes et trigonalisation*
Soit
$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_M et étudier si M est diagonalisable.
2. a) M est-elle trigonalisable ?
   b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On appelle T cette matrice.
3. a) Justifier l'existence de trois matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = A + (-1)^n B + nC.$$
   b) Déterminer A, B et C en fonction I_3, M et M^2.

Exercice 21 *Trigonalisation et suites imbriquées*
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont semblables, et expliciter une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » et des « 1 » telle que $B = P^{-1}AP$.

2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$
et les conditions initiales
$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$