Exercice 1 *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geq 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. a) Justifier sans calcul que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer les éléments propres de A_2.
   c) Déterminer les éléments propres de A_3.
2. On suppose désormais $n \geq 3$.
   a) Montrer par récurrence sur n que $\det(A_n) = -n+2$.
   b) Montrer que 1 est valeur propre de A_n en précisant le sous-espace propre associé.
   c) En déduire que A_n possède deux autres valeurs propres, les déterminer ainsi que les sous-espaces propres associés.

Solution (**Ex.1 –** *Une matrice générique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. a) A_n est symétrique réelle donc diagonalisable.
   b) $\chi_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2)$, $\mathrm{Sp}(A_2) = \{0, 2\}$, $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
   c) $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\cdot\lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda-1)\cdot(\lambda^2 - 2\cdot\lambda - 1) = (\lambda - \sqrt{2} - 1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+\sqrt{2}-1)$
   $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$
   $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_{1+\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{1-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
2. a) Un développement par rapport à la dernière colonne donne :

$$D_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]} + D_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^n \det(I_{n-2}) + D_{n-1}$$

   $D_n = -1 + D_{n-1}$, une bonne vieille suite arithmétique, avec $D_2 = 0$, donc $D_n = -n+2$.

   b) $A_n - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A_n - I_n) = 2 < n$:

   1 est valeur propre avec $\dim(E_1) = n-2$, et

   $E_1 = \mathrm{Ker}(A_n - In) = \mathrm{Vect}(E_2 - E_3, E_2 - E_4, \dots, E_2 - E_n)$.

   c) Puisque A_n est diagonalisable, appelons λ et μ les deux autres valeurs propres de A_n (éventuellement confondues).

   Alors : $\mathrm{Tr}(A_n) = (n-2)\times 1 + \lambda + \mu$ donc $\lambda + \mu = 2$,

   $\det(A_n) = 1^{n-2}\lambda\mu$ donc $\lambda\mu = 2-n$.

   Donc λ et μ sont les racines de $X^2 - 2X + (2-n)$.

   $\Delta = 4 - 4(2-n) = 4n-4$, et par exemple :
   $$\lambda = 1 - \sqrt{n-1} \text{ et } \mu = 1 + \sqrt{n-1}$$

   .

   On en tire déjà : $\mathrm{Sp}(A_n) = \{1, 1-\sqrt{n-1}, 1+\sqrt{n-1}\}$.

$$A_n - (1 \pm \sqrt{n-1})I_n = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{n-1} & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \mp\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \mp\sqrt{n-1} \end{pmatrix}$$

En remarquant que $\pm\sqrt{n-1}C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 0$, on a :

$$E_{1\pm\sqrt{n-1}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$, ce qui corrobore l'étude de A_3, et même A_2 (pour laquelle cependant 1 n'est pas valeur propre).

Exercice 2 *Matrices à paramètres*

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Étudier la diagonalisabilité

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Même question pour

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

Solution (**Ex.2 –** *Matrices à paramètres*)

Étude de B

$\chi_B = X^2 - \alpha\beta$

Cas réel :

- Si $\alpha\beta < 0$, $\chi_B = X^2 + |\alpha\beta|$ n'est pas scindé donc B n'est pas diagonalisable.
- Si $\alpha\beta = 0$, $\chi_B = X^2$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ donc B n'est diagonalisable que si elle est nulle, puisque semblable à 0_2, donc B est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha = \beta = 0$.
- Si $\alpha\beta > 0$, $\chi_B = (X - \sqrt{\alpha\beta})(X + \sqrt{\alpha\beta})$ donc χ_B est scindé à racines simples et B est diagonalisable.

Cas complexe :

- Si $\alpha\beta \neq 0$, notons ρ et $-\rho$ les deux racines carrées de $\alpha\beta$. Alors $\chi_B = (X - \rho)(X + \rho)$ est scindé à racines simples et B est diagonalisable.
- Si $\alpha\beta = 0$, $\chi_B = X^2$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ donc B n'est diagonalisable que si elle est nulle, puisque semblable à 0_2, donc B est diagonalisable si, et seulement si, $\alpha = \beta = 0$.

Étude de C

$\chi_C = (X - \beta)\left(X^2 - \alpha\gamma\right)$.

Par rapport à la matrice précédente, la présence de la valeur propre β ne modifie pas l'analyse.

Cas réel :

C est diagonalisable si, et seulement si, $(\alpha, \gamma) = (0, 0)$ ou $\alpha\gamma > 0$.

Cas complexe :

C est diagonalisable si, et seulement si, $(\alpha, \gamma) = (0, 0)$ ou $\alpha\gamma \neq 0$.