Exercice 1 *Spectre de l'automorphisme réciproque*

Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Justifier que $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{\dfrac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\right\}$.

Solution (**Ex.1 –** *Spectre de l'automorphisme réciproque*)

1. $0 \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow \ker(u) \neq \{0\} \Longleftrightarrow u$ non injectif : exclu.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   Alors en composant par u^{-1}, $x = \lambda u^{-1}(x)$ i.e. $u^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda} x$ ce qui prouve que $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de u^{-1}.
   En permutant les rôles de u et u^{-1}, on justifie l'égalité demandée.

Exercice 2 *Valeur propre nulle et injectivité*

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathrm{E} \neq \{0\}$.

1. Montrer que : $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow f$ injective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $0 \in \mathrm{Sp}(f^n) \Rightarrow 0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
3. On suppose f nilpotent. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Solution (**Ex.2 –** *Valeur propre nulle et injectivité*)

1. $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Longleftrightarrow \ker(f - 0id) = \{0\} \Longleftrightarrow f$ injective.
2. Supposons $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$, donc $\exists x \neq 0_{\mathrm{E}}$ tel que $f^n(x) = 0_{\mathrm{E}}$.
   Si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, alors f est injective donc : $\forall y \neq 0_{\mathrm{E}}, f(y) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
   Par récurrence immédiate, $f^n(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$, ce qui est absurde.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.
   Supposons que $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. Alors $f^p(x) = \lambda^p x$ d'une part, et $f^p(x) = 0_{\mathrm{E}}$ d'autre part. Donc $\lambda^p = 0$ puisque $x \neq 0_{\mathrm{E}}$. Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.
   Mais $0 \in \mathrm{Sp}(f^p)$ puisque $\forall x \in \mathrm{E}, f^p(x) = 0_{\mathrm{E}} = 0.x$. Donc par 2. $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.
   Finalement $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

Exercice 3 *L'opérateur « décalage »*

Soit $\mathrm{E} = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0\right\}$ et $\Delta : \mathrm{E} \to \mathrm{E}, u \mapsto v$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de Δ.

Solution (**Ex.3 –** *L'opérateur « décalage »*)

Analyse –

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{E}$.

$\Delta(u) = \lambda u \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \lambda^n$

Comme $u \in \mathrm{E}$, $\lambda \in \,]-1\,;\,1[$.

Synthèse –

$\mathrm{Sp}(\Delta) = \,]-1\,;\,1[$ et pour $\lambda \in \,]-1\,;\,1[$, $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Vect}\big((\lambda^n)_n\big)$.

Exercice 4 *Du côté des projections et des symétries*

Soit F et G deux sous-espaces non triviaux supplémentaires dans un espace E de dimension finie. Soit p et s respectivement la projection sur F respectivement la symétrie d'axe F tous deux de direction G.

En exploitant les relations $p^2 = p$ et $s^2 = id_{\mathrm{E}}$, déterminer les éléments propres de p et s et justifier qu'ils sont diagonalisables.

Exercice 5 *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA}$.

Déterminer les éléments propres de u.

Solution (**Ex.5 –** *Endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*)

Pour $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\mathrm{AM} - \mathrm{MA} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ donc immédiatement :

$0 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$,

$1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

$-1 \in \mathrm{Sp}(f)$ avec $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$,

Bilan : $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0, 1\}$ avec $\dim \mathrm{E}_{-1} + \dim \mathrm{E}_0 + \dim \mathrm{E}_1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc f est diagonalisable.
Variante : dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ diagonale !}$$

Exercice 6 *Matrice de rang 1*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$.
2. Montrer qu'il existe un scalaire λ tel que $\mathrm{A}^2 = \lambda \mathrm{A}$.
3. Montrer que λ est une valeur propre de A.

Solution (**Ex.6 –** *Matrice de rang 1*)

1. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 1$ donc les n colonnes de A sont proportionnelles à une même colonne $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Écrivons $\mathrm{A} = (a_1\mathrm{C}|a_2\mathrm{C}|\ldots|a_n\mathrm{C})$. Alors en posant $\mathrm{L} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{A} = \mathrm{CL}$.
2. $\mathrm{A}^2 = (\mathrm{CL})(\mathrm{CL}) = \mathrm{C}(\mathrm{LC})\mathrm{L}$ or $\mathrm{LC} = \left(\sum_i a_i c_i\right) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. En posant $\lambda = \sum_i a_i c_i$, $\mathrm{A}^2 = \mathrm{C}(\lambda)\mathrm{L} = \lambda \mathrm{CL} = \lambda \mathrm{A}$.
3. $\mathrm{AC} = \mathrm{CLC} = \mathrm{C}(\lambda) = \lambda \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} \neq 0$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Exercice 7 *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$.
Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\varphi)$.

Solution (**Ex.7 –** *Un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{AC} = \lambda \mathrm{C}$. En prenant la matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes valent C, $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} = \lambda \mathrm{M}$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$.
• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $\varphi(\mathrm{M}) = \lambda \mathrm{M}$, i.e. $\mathrm{AM} = \lambda \mathrm{M}$. Soit C une colonne non nulle de M. Alors $\mathrm{AC} = \lambda \mathrm{C}$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$.

Exercice 8 *Commutant d'une matrice diagonale*

1. Soit $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux deux à deux distincts.
   Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec D si, et seulement si, A est diagonale.
2. Soit λ et μ deux scalaires distincts et p et q deux entiers naturels non nuls.
   Déterminer les matrices commutant avec $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_p & 0 \\ \hline 0 & \mu \mathrm{I}_q \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

Solution (**Ex.8 –** *Commutant d'une matrice diagonale*)

1. Dans ce qui suit, (i,j) décrit $[\![1\,;\,n]\!]^2$.
   Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Notons que $D = (d_{i,j}) = (\lambda_i \delta_{i,j})$ où δ est le symbole de Kronecker.
   Par la définition du produit matriciel :
   $AD = DA \iff \forall (i,j), \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\lambda_k \delta k,j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,k} a_{k,j} \iff \forall (i,j), a_{i,j}\lambda_j = \lambda_i a_{i,j} \iff \forall (i,j), (\lambda_i - \lambda_j) a_{i,j} = 0 \iff \forall (i,j), (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0) \iff$ A *diagonale*

2. Raisonnons par blocs. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
   $$MD = DM \iff \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \mu B \\ \hline \lambda C & \mu D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A & \lambda B \\ \hline \mu C & \mu D \end{array}\right) \iff \begin{cases} (\mu-\lambda)B = 0_{p,q} \\ (\lambda-\mu)C = 0_{q,p} \end{cases} \iff$$
   $$\begin{cases} B = 0_{p,q} \\ C = 0_{q,p} \end{cases} \iff M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \text{(diagonale par blocs).}$$

Exercice 9 *Exemple de réduction d'endomorphismes*

Soit $E = \mathbb{R}^3$, f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base canonique de E. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est diagonalisable, en précisant une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$; **2.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **4.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.9 –** *Exemple de réduction d'endomorphismes*)

1. $\chi_A = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X-2)(X-1)(X+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{-1,1,2\}$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}((-2,1,2))$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.
2. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1,2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f diagonalisable.
3. $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1,2\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((-2,1,1))$, f non-diagonalisable.
   Remarque : même polynôme caractéristique pour 2. & 3.
4. $\chi_A = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1)$, $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$, f non-diagonalisable.

Exercice 10 *Sous espace propre de dimension n-1*

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1 soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admettant une valeur propre λ telle que $\dim E_\lambda = n-1$ soit diagonalisable.

Solution (**Ex.10 –** *Sous espace propre de dimension n-1*)

1. $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $\omega(0) \geq \dim \mathrm{Ker}(A) = n-1$, donc $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$, donc $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$.

   Premier cas : $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$, A n'est pas diagonalisable.

   Second cas : $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$ et $\dim E_0 = \omega(0)$, $1 \leq \dim E_{\mathrm{Tr}(A)} \leq \omega(1)$, donc $\dim E_{\mathrm{Tr}(A)} = 1$, et A est diagonalisable.

2. $\chi_A = (X-\lambda)^{n-1}(X-\mu)$ avec éventuellement $\mu = \lambda$.

   $\chi_A = (X^{n-1} - (n-1)\lambda X^{n-1} + \dots)(X-\mu) = X^n - \Big((n-1)\lambda + \mu\Big)X^{n-1} + \dots$

   Premier cas : $\mathrm{Tr}(A) = n\lambda$, donc $\mu = \lambda$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ avec $\dim E_\lambda < \omega(\lambda)$, A n'est pas diagonalisable.

   Second cas : $\mathrm{Tr}(A) \neq n\lambda$, donc $\mu \leq \lambda$, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\dim E_\lambda = n-1$ et $\dim E_\mu = 1$, A est diagonalisable.

   Notons que **1.** n'est qu'un cas particulier de ce cas.

   Variante efficace – Quitte à plonger dans $\mathbb{C}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \mu = \mathrm{Tr}(A) - (n-1)\lambda \in \mathbb{K}.$$

   Premier cas : $\mu = \lambda$ (i.e. $\mathrm{Tr}(A) = n\lambda$), $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et $\dim E_\lambda < n$ donc A n'est pas diagonalisable.

   Second cas : $\mu \neq \lambda$ (i.e. $\mathrm{Tr}(A) \neq n\lambda$), $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mathrm{Tr}(A) - (n-1)\lambda\}$ et $\dim E_\lambda + \dim E_{\mathrm{Tr}(A)-(n-1)\lambda} = n$ donc A est diagonalisable.

Exercice 11 *Matrice à deux paramètres*

Soit $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.11 –** *Matrice à deux paramètres*)

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable.
2. $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = 2n-2 = \omega(0)$ (car diagonalisable). On note λ et μ les deux autres valeurs propres de A (et il n'est pas exclu que $\lambda = \mu$).
   Comme A est diagonalisable, semblable à $diag(\lambda, \mu, 0, \dots, 0)$, $\lambda + \mu = \mathrm{Tr}(A) = 2na$, donc $\mu = 2na - \lambda$.
   Quelques idées pour trouver λ et μ :
   • la somme des coefficients de chaque est constante, égale à $n(a+b)$ donc $A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n(a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\lambda = n(a+b)$ est une valeur propre. Alors $\mu = n(a-b)$.
   • En sommant les $2n$ lignes sur la première ligne, on obtient une factorisation :
   $$\chi_A(X) = \det(XI_{2n} - A) = (X - n(a+b))\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \times & \times & & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & & \times \end{vmatrix} \text{ donc } \lambda = n(a+b) \text{ est}$$
   une racine de χ_A donc une valeur propre. $\mu = n(a-b)$ est l'autre.
   • $\mathrm{Tr}\left(A^2\right) = 2n^2(a^2+b^2)$, et comme A^2 est semblable à $diag(\lambda^2, \mu^2, 0, \dots, 0)$, $\lambda^2 + \mu^2 = n^2(a^2+b^2)$.

On en tire : $\lambda\mu = \dfrac{1}{2}\Big((\lambda+\mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\Big) = n^2(a^2-b^2)$.
Donc λ et μ sont les racines du trinôme $X^2 - 2naX + n^2(a^2-b^2)$.
$\Delta = 4n^2b^2 = (2nb)^2 > 0$, $\lambda = n(a+b)$ et $\mu = n(a-b)$.
Bref, A est semblable à $diag\Big(n(a+b), n(a-b), 0, \dots, 0\Big)$.

Exercice 12 *Sommes constantes en ligne ou en colonne*

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice. On suppose que : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$.

   Montrer que $s \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. En est-il de même si : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = s$?
3. Étudier si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

   est diagonalisable. Si oui, proposer une matrice diagonale semblable à A.

Solution (**Ex.12 –** *Sommes constantes en ligne ou en colonne*)

1. Avec $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AU = sU$ donc $s \in \mathrm{Sp}(A)$ et $U \in E_s$.

   Variante : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$: on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ et on factorise la première colonne par $X - s$, alors $\chi_A(X) = (X-s)\det(?)$, et s est racine de χ_A.
2. Cette fois, ${}^tA$ vérifie la propriété de **1.**, donc $s \in \mathrm{Sp}({}^tA)$. Or $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$ donc $s \in \mathrm{Sp}(A)$. Donc $\dim(E_0) + \dim(E_{10}) = 4$ et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: A est diagonalisable.
3. $\mathrm{rg}(A) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $\dim E_0 = 3$. Par **2.**, $10 \in \mathrm{Sp}(A)$. Comme $\dim E_{10} \geq 1$ et $\dim E_0 + \dim E_{10} \leq 4$, $\dim E_{10} = 1$.

Exercice 13 *Calculs explicites en dimension 3*

Pour les trois matrices suivantes, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres, en précisant si elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, voire dans $\mathbb{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 6 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Solution (**Ex.13 –** *Calculs explicites en dimension 3*)

- $\chi_M = (X-1)(X+1)^2$, $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 1\}$, $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, non diagonalisable, ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$.
- $\chi_N = (X-2)^2 \cdot (X-1)$, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2\}$, $E_1(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$, diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
- $\chi_L = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X-i)(X+i)$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(L) = \{-1\}$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(L) = \{-1, i, -i\}$, $E_{-1}(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_i(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1-i \\ 3-i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, $E_{-i}(L) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ 3+i \\ 6 \end{pmatrix}\right)$, non dia-

gonalisable sur $\mathbb{R}$, mais diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14 *Matrice à un paramètre*

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $n \geq 3$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & \dots & \alpha \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ \alpha & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i.e. $a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \{1;n\}, \\ 1 & \text{si } i \in [\![2\,;\, n-2]\!]. \end{cases}$

Étudier, suivant la valeur de α, si A est diagonalisable, et préciser dans tous les cas ses éléments propres.

Solution (**Ex.14 –** *Matrice à un paramètre*)

$\operatorname{rg}(A) = n-1$ donc $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ et $\dim E_0 = n-1$.

De plus, $E_0 = \operatorname{Vect}(E_1 - E_2, \dots, E_1 - E_n)$ où $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Du coup $\omega(0) \geq n-1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X-\lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$. Mais comme $\chi_A = X^n - \operatorname{Tr}(A) X^{n-1} + \dots$, nécessairement $\lambda = \operatorname{Tr}(A) = 2\alpha + n - 2$.

• Premier cas : $\alpha = 1 - \dfrac{2}{n}$.

Alors $\lambda = 0$, $\chi_A = X^n$ et $\dim E_0 < \omega(0)$: A n'est pas diagonalisable

• Second cas : $\alpha \neq 1 - \dfrac{n}{2}$, alors $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 2\alpha + n - 2\}$ avec $\dim E_{2\alpha+n-2} = 1$. A est diagonalisable avec $\chi_A = X^{n-1}(X - (2\alpha + n - 2))$.

Enfin : $A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = (2\alpha + n - 2) \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ donc $E_{2\alpha+n-2} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 15 *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$F = \left\{ M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.
2. Justifier que toute matrice $M_{a,b,c}$ de F est diagonalisable. Que valent $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M_{a,b,c})} \lambda \times \mu(\lambda)$ et $\displaystyle\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M_{a,b,c})} \lambda^{\mu(\lambda)}$?
3. Donner deux matrices J et K de E telles que (I_3, J, K) soit une base de F.
4. Déterminer les éléments propres de J et K.
5. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Déduire de la question précédente les valeurs propres de $M_{a,b,c}$.

Solution (**Ex.15 –** *Un espace vectoriel de matrices diagonalisables*)

1. $F = \operatorname{Vect}(I_3, J, K)$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 3.
2. Toute matrice de F est symétrique réelle donc diagonalisable.
$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M_{a,c,b})} \lambda \mu(\lambda) = \operatorname{Tr}(M_{a,c,b}) = 3a$$
$$\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M_{a,b,c})} \lambda^{\mu(\lambda)} = \det(M_{a,b,c}) = a^3 + 2b^2c - ac^2 - 2ab^2 = (a-c)(a^2 + ac - 2b^2)$$
3. Voir première question.
4. $\operatorname{Sp}(J) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$, $E_{-\sqrt{2}}(J) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_0(J) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $E_{\sqrt{2}}(J) =$

$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$

$\mathrm{Sp}(K)=\{-1,0,1\}$, $E_{-1}(K)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_0(K)=\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $E_1(K)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

5. $U=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est vecteur propre commun de I_3, J et K donc $M_{a,b,c}U=aI_3U+bJU+cKU=aU-cU=(a-c)U$.
   Donc $a-c$ est une valeur propre.
   En notant λ et μ les deux autres valeurs propres, par 2., on a
   $$\begin{cases}\lambda+\mu=3a-(a-c)=2a+c\\ \lambda\mu=a^2+ac-2b^2\end{cases}$$
   λ et μ sont les racines de $X^2-(2a+c)X+a^2-2b^2$.
   $\Delta=(2a+c)^2-4(a^2+ac-2b^2)=8b^2+c^2\geqslant 0$
   Les deux autres valeurs propres sont
   $$\frac{2a+c\pm\sqrt{8b^2+c^2}}{2}$$

Exercice 16 *Transposition et symétrie*
Soit $n\geqslant 2$, $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f\in\mathcal{L}(E)$ défini par $f(M)=M^T-M$.

1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de f.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de f.

Solution (**Ex.16 –** *Transposition et symétrie*)

1. $f^2(M)=(M^T-M)^T-(M^T-M)=2M-2M^T=-2f(M)$ donc $f^2=-2f$.
2. $X^2+2X=X(X+2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de f donc f est diagonalisable.
3. $\mathrm{Sp}(f)\subset\{-2,0\}$,
   $f(M)=0\iff M^T=M\iff M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $0\in\mathrm{Sp}(f)$ et $E_0=\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
   $f(M)=-2M\iff M^T=-M\iff M\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, donc $-2\in\mathrm{Sp}(f)$ et $E_{-2}=\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Comme f est diagonalisable,
   $\omega(0)=\dim\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n+1)}{2}$,
   $\omega(-2)=\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n-1)}{2}$,
   $\chi_f=X^{n(n+1)/2}(X+2)^{n(n-1)/2}$.

Exercice 17 *Polynôme annulateur*
Soit $A\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^2-4A+3I_5=0_5$ et $\mathrm{Tr}(A)=9$.
Déterminer χ_A.

Solution (**Ex.17 –** *Polynôme annulateur*)
$X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples A donc A est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(A)\subset\{1,3\}$.
On a alors $\mathrm{Tr}(A)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\lambda\times\omega(\lambda)=9$, la seule possibilité étant $\omega(3)=2$ et $\omega(1)=3$ puisque $\omega(1)+\omega(3)=5$.
Donc $\chi_A=(X-1)^3(X-3)^2$.

Exercice 18 *Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$*
Soit $n\geqslant 1$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $f(P)$ défini par
$$f(P)=(X^2-1)P'-(nX+1)P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. On considère la famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ définie par
   $$P_k(X)=(X-1)^k(X+1)^{n-k}.$$
   Calculer, pour tout k de $[\![0\,;\,n]\!]$, $f(P_k)$.
3. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution (**Ex.18 –** *Endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$)

1. La linéarité ne pose aucun souci
   On a $\deg(f(P)) \leqslant n+1$ et en notant a_n le coefficient de X^n dans P, le coefficient de X^{n+1} de $f(P)$ est $na_n - na_n = 0$, donc $\deg(f(P)) \leqslant n$ et $f(P) \in E$.
2. $\forall k \in [\![0\,;\,n]\!]$,
   $f(P_k) = (X^2-1)[k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k}+(n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}]-(nX+1)(X-1)^k(X+1)^{n-k}$
   $f(P_k) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}\Big[k(X+1)+(n-k)(X-1)-nX-1\Big]$
   $f(P_k) = (2k-n-1)P_k$
3. Le calcul précédent fournit $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes, donc f est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(f) = \{2k-n-1, k \in [\![0\,;\,n]\!]\}$ et $n+1$ sous-espaces propres de dimension 1, précisément, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $E_{2k-n-1} = \mathrm{Vect}(P_k)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 19}}$ *Un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : E \longrightarrow E, M \longmapsto M - \mathrm{Tr}(M)\,I_n$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Soit $P = X^2+(n-2)X+1-n$. Calculer $P(\varphi)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant φ dans une base idoine.
4. En déduire $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

Solution (**Ex.19 –** *Un endomorphisme de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Aucun souci grâce à la linéarité de la trace.
2. Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $\varphi^2(M) = \varphi(M) - \mathrm{Tr}(M)\varphi(I_n) = M - \mathrm{Tr}(M)I_n - \mathrm{Tr}(M)(1-n)I_n = M+(n-2)\mathrm{Tr}(M)I_n$.
   $P(\varphi)(M) = M+(n-2)\mathrm{Tr}(M)I_n+(n-2)M-(n-2)\mathrm{Tr}(M)I_n+(1-n)M$, i.e. $P(\varphi)(M) = 0_n$.
   Donc $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$.
3. $P = (X-(1-n))(X-1)$ est un polynôme annulateur de φ scindé à racines simples donc φ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{1-n, 1\}$.
   $\varphi(M) = M \iff \mathrm{Tr}(M) = 0 \iff M \in \ker(\mathrm{Tr})$ donc $1 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim(E_1) = \dim(\ker(\mathrm{Tr})) = n^2-1$ par la fomule du rang appliquée à $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
   Comme φ est diagonalisable et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$, cela suffit pour affirmer que $1-n \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ et $\dim(E_{1-n}) = 1$.
   Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la supplémentarité $E_1 \oplus E_{1-n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
   $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = diag(\underbrace{1,\dots,1}_{n^2-1\ fois}, 1-n).$$
4. $\mathrm{Tr}(\varphi) = n^2-1+1-n = n^2-n$ et $\det(\varphi) = 1-n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 20}}$ *Puissances n-èmes et trigonalisation*

Soit
$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -8 & -1 & -4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer χ_M et étudier si M est diagonalisable.
2. a) M est-elle trigonalisable ?
   b) Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les de la première ligne valent 1 et telle que
   $$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On appelle T cette matrice.
3. a) Justifier l'existence de trois matrices A, B et C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = A + (-1)^n B + nC.$$
   b) Déterminer A, B et C en fonction I_3, M et M^2.

Solution (**Ex.20 –** *Puissances n-èmes et trigonalisation*)

1. $\chi_M = X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2 \cdot (X+1)$

mais $\dim E_1 = 3 - \mathrm{rg}(M - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -8 & -2 & -4 \\ -12 & -4 & -6 \end{pmatrix} = 1$

2. a) M est trigonalisable car χ_M est scindé.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) Récurrence ou Newton : ${}^{q}qn \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' + (-1)^n B' + C'n$ avec A', B', C' adéquates.

Alors $M^n = PD^nP^{-1} = A + (-1)^n B + Cn$ où $A = PA'P^{-1}$ etc.

b) On peut calculer A, B, C à l'aide de P^{-1}.

On peut aussi remarquer :

$n = 0 \Longrightarrow A + B = I_3$,

$n = 1 \Longrightarrow A - B + C = M$,

$n = 2 \Longrightarrow A + B + 2C = M^2$.

D'où : $C = \dfrac{1}{2}(M^2 - I_3)$, etc...

Exercice 21 *Trigonalisation et suites imbriquées*

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont semblables, et expliciter une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 0 » et des « 1 » telle que $B = P^{-1}AP$.
2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 1. \end{cases}$$

Solution (**Ex.21 –** *Trigonalisation et suites imbriquées*)

1. $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est trigonalisable.
En notant $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A, il s'agit de trouver une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ telle que $f(u) = u$ i.e. $u \in E_1$, $f(v) = 2v$ i.e. $v \in E_2$, et $f(w) = v + 2w$.
On calcule ceci matriciellement.
$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la résolution de $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$. Par exemple, avec $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Donc $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient, puisque $\det(\mathrm{P}) = -1 \neq 0$

2. Déterminer toutes les suites x, y et z de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n \end{cases}$$

Posons pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

Le système imposé équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$.

Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0$.

La formule du binôme en écrivant $\mathrm{B} = \mathrm{D} + \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où

$\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$ donne $\mathrm{B}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

L'inversion de P conduit à $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule $\mathrm{X}_n = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0$ DE DROITE À GAUCHE.

$$\begin{array}{rcl} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = \mathrm{X}_0 \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 2^n(n+1) \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} & = \mathrm{B}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (n+1)2^n \\ (n+1)2^n - 1 \\ 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} & = \mathrm{PB}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_0 \end{array}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n & = & (n+1)2^n \\ y_n & = & (n+1)2^n - 1 \\ z_n & = & *2^{n+1} - 1 \end{cases}$