Exercice 1 *Norme et morphisme injectif*

Soit (F, N) un espace vectoriel normé. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est injective.

Montrer que la fonction $N \circ u : x \mapsto N(u(x))$ est une norme sur E.

Solution (**Ex.1 –** *Norme et morphisme injectif*)

Vérifions les 4 axiomes d'une norme.

Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Comme N est positive, $N \circ u$ est positive.

(ii) Si $N \circ u(x) = 0$ alors $u(x) = 0$ car N est une norme, donc $x = 0$ car u est injective.

(iii) $N \circ u(\lambda x) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N \circ u(x)$ car u est linéaire et N est une norme.

(iv) $N \circ u(x + y) = N(u(x) + u(y)) \leqslant N \circ u(x) + N \circ u(y)$ car u est linéaire et N est une norme.

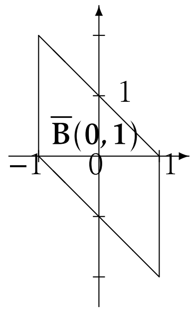
Exercice 2 *Une norme sur* $\mathbb{R}^2$

Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on pose $M(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

1. Montrer que M est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité fermée de M.
3. Trouver des constantes λ et μ strictement positives telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ M(x) \leqslant \lambda \|x\|_2 \text{ et } \|x\|_2 \leqslant \mu M(x),$$
les constantes λ et μ étant aussi petites que possible.

Solution (**Ex.2 –** *Une norme sur* $\mathbb{R}^2$)

1. On vérifie sans problème les 4 axiomes d'une norme.
2. $|x_1| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x_1 \leqslant 1$,
$|x_1 + x_2| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 1 \iff -1 - x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1$
La boule unité fermée est le parallélogramme suivant :



3. $\overline{B}(0, 1)$ est incluse dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et contient le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.
   - Donc $M(x) = 1 \Rightarrow \|x\|_2 \leqslant \sqrt{5}$.
   Par homogénéité, pour tout vecteur x non nul,
   $$\|x\|_2 = \left\| M(x) \left(\frac{1}{M(x)} x \right) \right\|_2 = M(x) \left\| \frac{1}{M(x)} x \right\|_2 \leqslant M(x)\sqrt{5}$$
   Comme $\|(-1, 2)\|_2 = \sqrt{5} = \sqrt{5} M((-1, 2))$ puisque $M((-1, 2)) = 1$, $\mu = \sqrt{5}$.
   - De même, $\|x\|_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow M(x) \leqslant 1$ donc $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow M(x) \leqslant \sqrt{2}$, donne par un raisonnement analogue, pour tout $x \neq 0$, $M(x) \leqslant \sqrt{2}\|x\|_2$, avec égalité pour $x = (1/2, 1/2)$, donc $\lambda = \sqrt{2}$.

Exercice 3 *Normes et convergence dans* $\mathbb{R}[X]$

Pour tout polynôme réel P, écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X_k$, on note
$$\|P\| = \sup_{x \in [0\,;\,1/2]} |P(x)| \text{ et } N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Prouver que $\|.\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|.\|$ et vers 1 pour la norme N.
3. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X.

Solution (**Ex.3 –** *Normes et convergence dans* $\mathbb{R}[X]$)

1. • $\|.\|$ est la norme infinie sur $[0\,;\,1/2]$. Pour la séparation, on notera que $\|P\| = 0$ entraîne que P possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.
   • Pour N, on notera qu'il n'y a aucun problème de convergence des séries puisque pour tout polynôme P de coefficients (a_k), la suite (a_k) est nulle à partir d'un certain rang. Pour la séparation, on notera que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|a_k|}{k} = 0$ entraîne $\forall k \geqslant 1, a_k = 0$, et qu'alors $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| = 0$ entraîne de plus $a_0 = 0$.
2. • $\|X^n\| = \dfrac{1}{2^n}$ donc $\|X^n - 0\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 : X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|} 0$
   • $N(X^n - 1) = 0 + \dfrac{1}{n}$ donc $N(X^n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 : X^n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} 1$
3. Je propose $M : P \mapsto |a_0| + \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|a_k|}{k}$... à verifier !

Exercice 4 *Trois normes sur un espace de dimension infinie*

Dans $E = \mathcal{C}^1([[0\,;\,1], \mathbb{R})$, on considère :

$$N : E \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(0)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \quad \text{et}$$

$$\nu : E \to \mathbb{R}, f \mapsto |f(1)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt.$$

1. Montrer que N et ν sont des normes sur E.
2. a) Pour $f \in E$, quelle relation y a-t-il entre $f(0)$, $f(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$?
   b) Montre que : $\forall f \in E, \nu(f) \leq 2N(f)$.
   c) Établir une inégalité majorant $N(f)$ à l'aide de $\nu(f)$.
3. Soit $M : f \mapsto |f(0)| + \sup\limits_{[0;1]} \left|f'\right| = |f(0)| + \left\|f'\right\|_\infty$. On admet que M est une norme sur E.
   a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0\,;\,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$.
   Calculer $N(f_n)$ et $M(f_n)$.
   b) M et N sont-elles des normes équivalentes ?

Solution (**Ex.4 –** *Trois normes sur un espace de dimension infinie*)

1. • N et ν sont positives et homogènes par positivité et homogénéité de la valeur absolue, et positivité de l'intégrale.
   • $N(f) = 0$ (resp. $\nu(f) = 0$) entraîne $\begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ (resp. } f(1) = 0) \\ \displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt = 0 \end{cases}$ Or $|f'|$ est continue et positive, d'intégrale nulle sur $[0\,;\,1]$, donc f' est nulle sur $[0\,;\,1]$, donc f est constante sur $[0\,;\,1]$. Comme $f(0) = 0$ (resp. $f(1) = 0$), f est la fonction nulle de E. N et ν vérifient la séparation.
2. a) $\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt = \Big[f(t)\Big]_0^1 = f(1) - f(0)$
   b) Soit $f \in E$. De 2.a) je tire : $f(1) = f(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$ puis $|f(1)| \leq$

   $$|f(1)| + \int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \leq N(f)$$

   $$\nu(f) = |f(0)| + \int_0^1 f'(t)dt \leq N(f) + N(f) \leq 2N(f)$$

   c) On raisonne de même avec : $|f(0)| \leq |f(1)| + \displaystyle\int_0^1 \left|f'(t)\right| dt \leq \nu(f)$ issue de 2.a). On obtient : $N(f) \leq 2\nu(f)$.
   Commentaire : $\forall f \in E, \dfrac{1}{2}N(f) \leq \nu(f) \leq 2N(f)$, on dit que N et ν sont équivalentes.

Exercice 5 *Caractérisation des limites de puissances d'une matrice*

1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$. Mon-

trer que $B^2 = B$.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B^2 = B$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.
3. Qu'a-t-on démontré ?

Solution (**Ex.5 –** *Caractérisation des limites de puissances d'une matrice*)

1. $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$ entraîne (suite extraite) $A^{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$. Mais $A^{2k} = (A^k)^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} B^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite : $B^2 = B$.
2. Avec $A = B$, on a par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B$, donc $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.
3. Une matrice B est limite de la suite des puissances d'une matrice si, et seulement si, $B^2 = B$.

Exercice 6 *Maillage et quadrillage du plan*

Soit $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$ et $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z} \text{ ou } y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Représenter M. Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).
2. Représenter Q. Justifier sa nature topologique (ouvert ou fermé).
3. Quelle est la nature topologique de
$$U = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}]m\,;\, m+1[\times]n\,;\, n+1[\ ?$$

Solution (**Ex.6 –** *Maillage et quadrillage du plan*)

1. M est le maillage constitué de tous les points à coordonnées entières : $M = \mathbb{Z}^2$.
Tout revient à déterminer la nature de $\mathbb{Z}$... qui est fermé.
Attention ! On peut écrire $\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\}$ mais rien n'assure qu'une réunion infinie de fermés soit fermée.
Plein de méthodes ...
•*Racines d'une fonction continue –*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(\pi x)$. f est continue et $\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) = 0\}$ est fermé, donc $\mathbb{Z}^2$ aussi.
•*Caractérisation séquentielle –*
Soit (u_n) une suite convergente de $\mathbb{Z}$, de limite ℓ. Alors, avec $\varepsilon = 1/4$ dans la définition de la limite,
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \ell - 1/4 \leq u_n \leq \ell + 1/4.$$
Or $[\ell - 1/4\,;\, \ell + 1/4]$ ne contient qu'un entier : appelons-le m.
Alors : $\forall n \geq n_0, u_n \in [\ell - 1/4\,;\, \ell + 1/4] \cap \mathbb{Z} = \{m\}$, donc $\forall n \geq n_0, u_n = m$.
Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$, et par unicité de la limite, $\ell = m$, donc $\ell \in \mathbb{Z}$.
Ce qui prouve que $\mathbb{Z}$ est fermé.
•*Réunion et intersection –*
En revanche, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\,;\, n+1[$ est une réunion d'ouverts donc est ouverte. Par complémentarité, $\mathbb{Z}$ est fermé
2. Q est le quadrillage constitué des droites horizontales et verticales du plan.
$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sin(\pi x) = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sin(\pi y) = 0\}$.
Comme $(x,y) \mapsto \sin(\pi x)$ et $(x,y) \mapsto \sin(\pi y)$ sont continue sur $\mathbb{R}^2$, Q est la réunion de deux fermés donc est fermé.
3. $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,]m\,;\, m+1[\times]n\,;\, n+1[$ est ouvert. U est une réunion d'ouverts donc est ouvert.
Remarque : Q et U sont complémentaires dans $\mathbb{R}^2$. Dès lors, rien d'étonnant que U soit ouvert puisque Q est fermé, et réciproquement.

Exercice 7 *Nature des sous-espaces vectoriels en dimension finie*

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. a) Quelle est la nature topologique (fermé ou ouvert) de E ?
   b) Quelle est la nature de $\{0\}$?
   Dans la suite F désigne un sous-espace vectoriel de E de dimension d, telle que $d \in [\![1\,;\,n-1]\!]$. On note $(e_1, \dots, e_d)$ une base de F, que l'on complète en base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de E. On suppose : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \|e_i\| = 1$.
2. Soit $r > 0$.
   a) Justifier que $u = \dfrac{r}{2} e_n \in \mathcal{B}(0, r) \setminus F$.
   b) Qu'en déduire quant à la nature topologique de F ?
3. a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F. On suppose que la suite f converge vers un vecteur ℓ.
   En exploitant les suites coordonnées, montrer que $\ell \in F$.
   b) Quelle est la nature topologique de F ?
4. Justifier que F est convexe.

Exercice 8 *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   a) On pose, pour tout x de $\mathbb{K}$, $P(x) = \det(A + xI_n)$.
   Justifier que f n'a qu'un nombre fini de racines non nulles.
   b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n$. Justifier qu'il existe un entier k_0 tel que
   $$\forall k \geqslant k_0, \quad A_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$
   c) En déduire que A est limite d'une suite de matrices inversibles.
   d) Qu'en déduire ?

Solution (**Ex.8 –** *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   a) P est un polynôme en x de degré n ($P(X) = \chi_A(-X)$), il n'admet qu'un nombre fini de racines, donc un nombre fini de racines non nulles.
   b) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \overset{\text{déf.}}{=} A + \dfrac{1}{n} I_n$.
   Soit $r \overset{\text{déf.}}{=} \min\{|x| / P(x) = 0 \text{ et } x \neq 0\}$ si P admet des racines non nuls et $r \overset{\text{déf.}}{=} 1$ sinon.
   Dès que $\dfrac{1}{n} < r$ (i.e $n > \dfrac{1}{r}$), A_n est inversible. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$. Donc A est limite d'une suite de matrices inversibles.

Exercice 9 *Exponentielle de matrices particulières*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $S_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} M^j$.

On appelle *exponentielle de M*, si elle existe, la limite de la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$, notée e^M.

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

   a) $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, b) $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, c) $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. On suppose M diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que
   $$D = P^{-1}MP.$$
   Montrer que e^D et e^M existent, et donner une relation entre elles.
3. Calculer e^M pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution (**Ex.9 –** *Exponentielle de matrices particulières*)

1. Dans les cas suivants, montrer que e^M existe et la calculer :

   a) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b+abc+bc^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, et par récurrence :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad M^k=\begin{pmatrix} a^k & b\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}a^{k-1-i}c^i\\ 0 & b^k\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix} a^k & b\dfrac{a^k-c^k}{a-c}\\ 0 & b^k\end{pmatrix} & \text{si } a\neq c,\\ \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1}\\ 0 & b^k\end{pmatrix} & \text{si } a=c.\end{cases}$$

$\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{a^j}{j!}\xrightarrow[j\to+\infty]{}e^a$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{b^j}{j!}\xrightarrow[j\to+\infty]{}e^b$, donc :

- pour $a\neq c$, $S_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\begin{pmatrix} e^a & \dfrac{b(e^a-e^c)}{a-c}\\ 0 & e^c\end{pmatrix}\overset{\text{déf.}}{=}e^M$.
- pour $a=c$, $S_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\begin{pmatrix} e^a & be^a\\ 0 & e^c\end{pmatrix}\overset{\text{déf.}}{=}e^M$.

b) $M^2=a^2I_2$ donc, en posant $N=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $M^{2k}=a^{2k}I_2$ et $M^{2k+1}=a^{2k+1}N$.

$$S_{2j}=\left(\sum_{i=0}^{j}\frac{a^{2i}}{(2i)!}\right)I_2+\left(\sum_{i=0}^{j-1}\frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)N$$

Or : $\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{a^{2i}}{(2i)!}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\frac{e^a+e^{-a}}{2}$, et : $\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\frac{e^a-e^{-a}}{2}$

donc $S_{2j}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\dfrac12\begin{pmatrix}e^a+e^{-a} & e^a-e^{-a}\\ e^a-e^{-a} & e^a+e^{-a}\end{pmatrix}$

Comme $S_{2j+1}=\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{a^{2i}}{(2i)!}\right)I_2+\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!}\right)N$,

donc $S_{2j+1}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\dfrac12\begin{pmatrix}e^a+e^{-a} & e^a-e^{-a}\\ e^a-e^{-a} & e^a+e^{-a}\end{pmatrix}$

Finalement : $S_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}\dfrac12\begin{pmatrix}e^a+e^{-a} & e^a-e^{-a}\\ e^a-e^{-a} & e^a+e^{-a}\end{pmatrix}\overset{\text{déf.}}{=}e^M$.

c) $M=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, $M^2=\begin{pmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $\forall k\geq 3, M^k=0$.

La série n'a que trois termes non nuls, donc converge : $e^M=\begin{pmatrix}1&a&b+\dfrac{ac}{2}\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. On suppose M diagonalisable.
Soit $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que
$$D=P^{-1}MP.$$
En notant $D=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, on a : $\forall j\in\mathbb{N}$, $D^j=diag(\lambda_1^j,\dots,\lambda_n^j)$.

Notons pour tout k de $\mathbb{N}$, $T_k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}D^j$.

Donc $T_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}diag(\exp(\lambda_1),\dots,\exp(\lambda_n))\overset{\text{déf.}}{=}e^D$.

Comme : $\forall j\in\mathbb{N},\quad M^j=PD^jP^{-1}$, on a : $\forall k\in\mathbb{N}, S_k=PT_kP^{-1}$.

Donc : $S_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}Pe^DP^{-1}\overset{\text{déf.}}{=}e^M$.

Ainsi e^D et e^M existent, et $Pe^DP^{-1}=e^M$.

3. On a par récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}^*, M^n=2^{n-1}M$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 2^{k-1} \right) M = I_2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 2^k \right) M$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} I_2 + \frac{1}{2}(e^2 - 1) M \text{ d'où } \exp(M) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^2 & 1 - e^2 \\ 1 - e^2 & 1 + e^2 \end{pmatrix}$$