Exercice 1 *Matrice à paramètres : généralisation du DM5, exo 2*
Dans l'exercice 2 du devoir maison n°5, on a étudié la diagonalisabilité de

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit $n \geqslant 2$, $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \vdots & (0) & \diagup & 0 \\ 0 & \alpha_2 & (0) & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{n+1-i,i} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On note $\mathcal{C} = \left(e_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

L'objectif de l'exercice est d'étudier la diagonalisabilité de A lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose pour l'instant que *n* est pair et on pose $n = 2p$.

1. On pose, pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, $F_i = \text{Vect}(e_i, e_{n+1-i})$.
   a) Montrer que, pour tout i, F_i est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ stable par φ.
   Dans la suite, pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, on note φ_i l'endomorphisme induit par φ sur F_i :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : F_i & \longrightarrow & F_i \\ u & \longmapsto & \varphi(u) \end{array}$$

   b) Montrer que les sous-espaces F_i pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.
2. Montrer que si, pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, φ_i est diagonalisable, alors φ est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose φ diagonalisable.
   a) Établir un lien entre le polynôme caractéristique de φ et les polynômes caractéristiques des φ_i.
   b) En déduire que pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, χ_{φ_i} est scindé et que φ_i possède au moins un vecteur propre que nous noterons u_i.
   c) Soit P_i la droite vectorielle engendré par u_i. Montrer qu'il existe un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ supplémentaire de P_i et stable par φ. On notera S_i ce sous-espace.
   d) On note $Q_i = F_i \cap S_i$. Montrer que Q_i est une droite vectorielle stable par φ.
   e) En déduire que φ_i est diagonalisable.
4. a) Quelle équivalence a-t-on démontrée dans les deux questions précédentes ?
   b) En déduire à quelle condition nécessaire et suffisante sur les scalaires α_i la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
5. Adapter ce qui précède au **cas où *n* est impair**. On écrira $n = 2p + 1$.

Solution (**Ex.1 –** *Matrice à paramètres : généralisation du DM5, exo 2*)

1. a) $\varphi(e_i) = \alpha_i e_{n+1-i} \in F$ et $\varphi(e_{n+1-i}) = \alpha_{n+1-i} e_i \in F$ donc $F = \text{Vect}(e_i, e_{n+1-i})$ est stable par φ.
   b) En concaténant les bases (e_i, e_{n+1-i}) des F_i, on obtient, à l'ordre près, la base canonique de $\mathbb{K}^n$ donc les sous-espaces F_i pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.
2. Supposons pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$, φ_i diagonalisable, et notons pour chaque i (u_i, v_i) une base de F_i formée de vecteurs propres de φ_i. Alors en concaténant les bases (u_i, v_i) des F_i, on obtient une base de $\mathbb{K}^n$ par supplémentarité des F_i, formée de vecteurs propres de φ, donc φ est diagonalisable.
3. Dans cette question, on suppose φ diagonalisable.
   a) Les F_i étant des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}^n$ et stables par φ, on peut considérer une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice représentant φ est diagonale par blocs :
   $$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_p \end{pmatrix}$$
   où chaque bloc $B_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ représente φ_i. Par déterminant d'une matrice diagonale par blocs, $\chi_\varphi(\lambda) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) - \lambda I_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \det(B_i - \lambda I_2) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{\varphi_i}(\lambda)$.
   b) • Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors χ_{φ_i} est scindé.
   • Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors si χ_{φ_i} n'est pas scindé, cela signifie qu'il possède deux racines complexes non réelles conjuguées, qui sont automatiquement des racines de χ_φ, ce qui est impossible puisque celui-ci est scindé donc à racines toutes réelles. Donc χ_{φ_i} est scindé.
   • Donc chaque φ_i possède au moins une valeur propre, donc au moins un vecteur propre u_i.
   c) Soit $\mathcal{P} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de φ (puisque φ est diagonalisable). Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (u_i) à l'aide de vecteurs de $\mathcal{P}$ en une base de $\mathbb{K}^n$. En notant S_i le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les $n-1$ vecteurs de $\mathcal{P}$ utilisés pour la complétion, on a :
   • S_i est un supplémentaire de P_i par concaténation de bases;
   • S_i est stable par φ car engendré par des vecteurs propres de φ.
   d) • $\dim(Q_i) = \dim(F_i \cap S_i) \leqslant \dim(F_i) = 2$.
   Si $\dim(Q_i) = 2$, alors $F_i \cap S_i = F_i$ donc $u_i \in S_I$ ce qui est impossible.
   Si $\dim(Q_i) = 0$, alors $\dim(F_i + S_i) = \dim(F_i) + \dim(S_i) = 2 + (n-1) = n+1 > \dim(\mathbb{K}^n)$ ce qui est impossible.
   Donc $\dim(Q_i) = 1$.
   • Enfin, puisque F_i et S_i sont stables par φ, on a :
   $\forall u \in F_i \cap S_i, \varphi(u) \in F_i$ et $\varphi(u) \in S_i$ donc $u \in F_i \cap S_i$: Q_i est stable par φ.
   e) En notant v_i un vecteur engendrant la droite Q_i, v_i est un vecteur propre de φ car Q_i est stable par φ.
   Et comme $v_i \in S_i$ sous-espace supplémentaire de $\text{Vect}(u_i)$, (u_i, v_i) est une famille libre de F_i, lui-même de dimension 2, donc une base de F_i, formée de vecteurs propres de φ donc de φ_i. Ainsi φ_i est diagonalisable.
4. a) φ est diagonalisable si, et seulement si, pour tout i de $[\![1\,;\,p]\!]$, φ_i est diagonalisable.
   b) $B_i = \mathcal{M}_{(e_i, e_{n+1-i})}(\varphi_i) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{n+1-i} \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}$ donc la diagonalisabilité de φ_i dépend de la diagonalisabilité de matrices du type $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$
$\chi_B = X^2 - ab$ est scindé si, et seulement si, $ab \geqslant 0$.
• Si $(a, b) = (0, 0)$, B est diagonalisable car diagonale.
• Si $ab = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ mais $\dim(E_0) = 1 < \mu_0 = 2$ donc B n'est pas diagonalisable.
• Si $ab > 0$, $\chi_B = (X - \sqrt{ab})(X + \sqrt{ab})$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.
Ainsi B est diagonalisable si, et seulement si, $ab > 0$ ou $(a, b) = (0, 0)$.
$\boxed{\text{Bilan dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
φ est diagonalisable si, et seulement si, $\forall i \in [\![1\,;\, p]\!], \quad \alpha_i \alpha_{n+1-i} > 0$ ou $(\alpha_i, \alpha_{n+1-i}) = (0, 0)$.
$\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$
• Comme dans $\mathbb{R}$, B est diagonalisable si $(a, b) = (0, 0)$ et ne l'est pas si $ab = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
• Si $ab \neq 0$, ab possède deux racines complexes distinctes ρ et $-\rho$ et $\chi_B = (X - \rho)(X + \rho)$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisabel.
$\boxed{\text{Bilan dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$
φ est diagonalisable si, et seulement si, $\forall i \in [\![1\,;\, p]\!], \quad \alpha_i \alpha_{n+1-i} \neq 0$ ou $(\alpha_i, \alpha_{n+1-i}) = (0, 0)$.

5. Avec $n = 2p + 1$, le raisonnement est le même en ajoutant un $(p + 1)$-ème sous-espace stable par φ : $F_{p+1} = \mathrm{Vect}(e_{p+1})$ (car $\varphi(e_{p+1})) = \alpha_{p+1} e_{p+1}$.
On a alors $\varphi_{p+\mathrm{I}}$ diagonalisable sans aucune condition puisque $\dim(F_{p+1}) = 1$.
Les conclusions sont les mêmes.

Exercice 2 *Généralisation de la généralisation (si !)*

La partie précédente repose sur l'existence de plans supplémentaires et stables et la relation entre diagonalisabilité de φ et diagonalisibilité des endomorphismes induits par φ sur ces plans.
Dans cette partie, nous allons démontrer les propriétés suivantes, généralisant les idées précédentes à des sous-espaces de dimension quelconque d'un espace de dimension finie E :

① Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors, pour tout sous-espace F de E stable par φ, l'endomorphisme φ_F induit par φ sur F est diagonalisable ;

② Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ et si les p sous-espaces F_i sont stables par φ, alors φ est diagonalisable si, et seulement si, les p endomorphismes induits par φ sur les sous-espaces F_i sont diagonalisables ;

③ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable par blocs, alors A est diagonalisable si, et seulement si, les blocs diagonaux sont tous diagonalisables.

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in [\![2\,;\, +\infty [\![$ et φ un endomorphisme sur E.
On s'inspirera des raisonnements tenus dans la première partie...

1. Dans cette question, on suppose que φ est diagonalisable.
Pour $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété
« pour tout sous-espace F de dimension k de E stable par φ, l'endomorphisme φ_F induit par φ sur F est diagonalisable. »
a) Justifier $\mathcal{P}_1$. Que penser de $\mathcal{P}_n$?
b) Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{P}_k$ et on considère un sous-espace F de dimension $k + 1$ de E stable par φ.
Montrer qu'il existe un supplémentaire G de F dans E stable par φ, puis que F contient au moins un vecteur propre de φ.
c) On note D la droite engendrée par ce vecteur propre. Justifier qu'il existe un supplémentaire S de D dans E stable par φ.

d) En considérant $F \cap S$, montrer que l'endomorphisme induit par φ sur F est diagonalisable.
e) En déduire la propriété ①.

2. Justifier la propriété ②.
3. Justifier la propriété ③.

Solution (**Ex.2 –** *Généralisation de la généralisation (si !)*)

1. **a)** • En dimension 1, tout endomorphisme est diagonalisable car une matrice d'ordre 1 est toujours diagonale. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
• Le seul sous-espace de dimension n de E est E lui-même. $\varphi_E = \varphi$ étant diagonalisable, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
b) ① Soit $\mathcal{P} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de φ (puisque φ est diagonalisable). Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter une base de F à l'aide de vecteurs de $\mathcal{P}$ en une base de E. En notant G le sous-espace de E engendré par les $n-(k+1)$ vecteurs de $\mathcal{P}$ utilisés pour la complétion, on a :
• G est un supplémentaire de E par concaténation de bases ;
• G est stable par φ car engendré par des vecteurs propres de φ.
② F et G étant supplémentaires et stables par φ, en considérant une matrice diagonale par blocs représentant φ dans une base adaptée à cette supplémentarité, on observe que $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_F} \times \chi_{\varphi_G}$.
Et puisque χ_φ est scindé, χ_{φ_F} est scindé. Donc χ_{φ_F} possède au moins une valeur propre, donc au moins un vecteur propre. Donc F contient un vecteur propre de φ.
c) Le même raisonnement que ① de la question précédente aussure qu'il existe un supplémentaire S de D dans E stable par φ.
d) Par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap S) = \dim(F) + \dim(S) - \dim(F+S) = k+1+n-1-n = k$ car $F+S = E$. En effet, F contient D et $D \oplus S = E$.
F et S étant stables par φ, $F \cap S$ est stable par φ : on peut appliquer la propriété $\mathcal{P}_k$ à $F \cap S$ et affirmer que $\varphi_{F \cap S}$ est diagonalisable.
En concaténant une base de D et une base de $F \cap S$ formée de vecteurs propres de φ, puisque $F = D \oplus (F \cap S)$, la matrice représentant φ_F dans cette base est diagonale.
Donc φ_F est diagonalisable. Et on a démontré $\mathcal{P}_{k+1}$, donc l'hérédité de la propriété.
e) Par récurrence sur $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a démontré $\mathcal{P}_k$ pour tout k de $[\![1\,;\, n]\!]$, donc on a prouvé la propriété ①.

2. On utilise les notations de la propriété ②.
• Si φ est diagonalisable, alors par ① les p endomorphismes φ_i induits par φ sur chaque F_i sont diagonalisables.
• Si les p endomorphismes φ_i induits par φ sur chaque F_i sont diagonalisables, soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en concaténant p bases respectives de F_i chacune formée de vecteurs propres de φ, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale. Donc φ est diagonalisable.
• Par double implication, ② est vraie.

3. ③ est la traduction matricielle de ②. En effet, en notant φ l'endomorphisme canoniquement associé à A, comme A est diagonalisable par blocs, notons $D = diag(B_1, \ldots, B_p)$ cette matrice diagonale par blocs. Il existe une famille de sous-espaces supplémentaires et stables dont les endomorphismes induits φ_i par φ sont représentés par les blocs B_i.
La diagonalisabilité de A équivaut à celle de φ, qui par ② équivaut à celle des φ_i, qui équivaut à celle des B_i.