Exercice 1 – D'après E3A - PC - 2022

1. (a) Intégrer l'inégalité : $\forall t \in [0\,;\,\pi/2], \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$.

(b) Appliquer le théorème de convergence dominée aux $f_n : [0\,;\,\pi/2] \to \mathbb{R}, t \mapsto \cos^n t$.

(c) Théorème spécial des séries alternées avec $u_n = (-1)^n |u_n|$.

2. (a) En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t \mathrm{d}t$, $|u_{n+2}| = (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|)$ i.e. $|u_{n+2}| = \dfrac{n+1}{n+2}|u_n|$.

(b) On vérifie $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ et on montre grâce à (a) que : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$.

(c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'est absolument convergente par comparaison à la série harmonique divergente $\displaystyle\sum \frac{1}{n+1}$.

3. (a) $\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1+\cos t}{2}$. (b)) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1/2}{\cos^2(t/2)} \mathrm{d}t = [\tan(t/2)]_0^{\pi/2} = 1$.

4. Comme $-\cos(t) \in]-1\,;\,0]$, $\mathrm{V}_n(t) = \dfrac{1-(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1+\cos t}$ et $\forall n, |\mathrm{V}_n| \leqslant 2$ avec $t \mapsto 2$ cpm intégrable.

Le théorème de convergence dominée conduit à $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{V}_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} = 1$, or par linéarité $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{V}_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} u_k$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2 – D'après E3A - 2020 - PC

5. $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0_n$

6. (a) Par récurrence sur k. La propriété découle de la définition de F pour les rangs 0, 1 et 2. De plus, si $\mathrm{M}^k \in \mathrm{F}$, alors M^k est une combinaison linéaire de I_n, M et M^2, donc de I_n et M vu la relation vérifiée par M^2. Ainsi M^k s'écrit $a\mathrm{I}_n + b\mathrm{M}$, et $\mathrm{M}^{k+1} = a\mathrm{M} + b\mathrm{M}^2 \in \mathrm{F}$.

(b) $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ est liée mais $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M})$ est libre. En effet, $\mathrm{M} = \lambda \mathrm{I}_n$ entraînerait $2\lambda^2 = 3\lambda - 1$ i.e. $\lambda = 1$ ou $\lambda = 1/2$, ce qui est exclu par l'énoncé. F est de dimension 2 et $(\mathrm{I}_n, \mathrm{M})$ en est une base.

(c) $(a\mathrm{I}_n + b\mathrm{M})(\alpha\mathrm{I}_n + \beta\mathrm{M}) = a\alpha\mathrm{I}_n + (a\beta + b\alpha)\mathrm{M} + b\beta\mathrm{M}^2 \in \mathrm{F}$ donc F est stable pour la multiplication des matrices.

(d) $\mathrm{I}_n = 2(\mathrm{B} - \mathrm{A})$ et $\mathrm{M} = 2\mathrm{B} - \mathrm{A}$ donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Donc $\mathcal{B} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ constitue une base de F.

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0, \mathrm{A}^2 = \frac{-1}{2}\mathrm{A}, \mathrm{B}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{B}.$$

(e) Soit $\mathrm{T} = a\mathrm{A} + b\mathrm{B}$. Par les calculs précédents

$$\mathrm{T}^2 = \mathrm{M} \iff -\frac{a^2}{2}\mathrm{A} + \frac{b^2}{2}\mathrm{B} = 2\mathrm{B} - \mathrm{A} \iff \begin{cases} -a^2/2 = -1 \\ b^2/2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\sqrt{2} \\ b = \pm 2 \end{cases}$$

Il y a exactement 4 matrices T de F vérifiant $\mathrm{T}^2 = \mathrm{M}$: $\mathrm{T} = \pm\sqrt{2}\mathrm{A} \pm 2\mathrm{B}$.

7. (a) $\mathrm{P} = 2\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 1$ est un polynôme annulateur de M de degré 2.

(b) La division euclidienne de X^k par P donne :

$$\exists \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \qquad \mathrm{X}^k = \mathrm{QP} + \left(2 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\mathrm{X} + \left(-1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

En substituant M à X, $\mathrm{M}^k = \left(2 - \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)\mathrm{M} + \left(-1 + \dfrac{1}{2^{k-1}}\right)\mathrm{I}_n$.

(c) Le membre de droite avec $k = -1$ vaut $-2\mathrm{M} + 3\mathrm{I}_n$. Or $\mathrm{M} \times (-2\mathrm{M} + 3\mathrm{I}_n) = -2\mathrm{M}^2 + 3\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ donc cette expression est valable pour $k = -1$.

8. On note $0_{n,1}$ la colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que, pour tout matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\ker(\mathrm{N}) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \mathrm{MU} = 0_n, 1\}$.

(a) Soit $\mathrm{U} \in \ker(\mathrm{A}) \cap \ker(\mathrm{B})$. $\mathrm{AU} = 0_{n,1}$ donc $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$, $\mathrm{BU} = 0_{n,1}$ donc $\mathrm{MU} = \frac{1}{2}\mathrm{U}$, donc $\mathrm{U} = \frac{1}{2}\mathrm{U}$ donc $\mathrm{U} = 0_{n,1}$.

(b) • $\ker(\mathrm{A}) + \ker(\mathrm{B}) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car ces noyaux sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• Soit $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\mathrm{U} = 2\mathrm{BU} - 2\mathrm{AU}$ or $-2\mathrm{AU} \in \ker(\mathrm{B})$ et $2\mathrm{BU} \in \ker(\mathrm{A})$ car $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 0_n$. Donc $\mathrm{U} \in \ker(\mathrm{A}) + \ker(\mathrm{B})$, d'où l'inclusion réciproque.

(c) L'égalité souhaitée équivaut à l'égalité précédente puisque A et B représentent respectivement $\varphi - id$ et $\varphi - \frac{1}{2}\varphi$ dans la base canonique.

(d) Dans une base adaptée à la supplémentarité précédente, comme $\varphi(u) = u$ si $u \in \ker(\varphi - id)$ et $\varphi(u) = \frac{1}{2}u$ si $u \in \ker(\varphi - \frac{1}{2}id)$, la matrice représentant φ est diagonale, avec des « 1 » puis des « $\frac{1}{2}$ » sur la diagonale.

(e) Deux matrices représentant un même endomorphisme étant semblables, il reste à s'assurer que $\dim(\ker(\varphi - id)) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$. Or $\dim(\ker(\varphi - id)) = n - \dim(\ker(\varphi - \frac{1}{2}id)) = \mathrm{rg}(\varphi - \frac{1}{2}id) = \mathrm{rg}(\mathrm{B})$. Et de façon analogue, $\dim(\ker(\varphi - \frac{1}{2}id)) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$. Ainsi il existe une matrice inversible T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{MT} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{\mathrm{rg(B)}} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{rg(A)}} \end{array}\right)$

Exercice 3 – D'après E3A - PSI - 2022

9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{r+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ r+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

10. 1 est une racine de $\Pi(\mathrm{X}) - \Pi(1)$ donc $\Pi(\mathrm{X}) - \Pi(1)$ est divisible par $\mathrm{X} - 1$.

11. Soit $\Pi \in E_{n+1}$ tel que $\Pi' = P$. Notons $Q \in E_n$ tel que $\Pi(X) - \Pi(1) = (X-1)Q(X)$. Alors $\forall x \neq 1, \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x P(t)\,dt = \dfrac{1}{x-1}\big(\Pi(x) - \Pi(1)\big) = Q(x)$

12. • Par la question précédente, $Q = f(P) \in E_n$.
• f est linéaire par linéarité de l'intégrale

13. $\forall x \neq 1, \quad f(X^k)(x) = \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)} = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} x^j$ par la première question. Donc $f(X^k) = \dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} X^j$.

14. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 3 = \dim(E_2)$ donc f est un automorphisme de E_2.

(c) $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

15. **On revient au cas général**, n désigne un entier naturel non nul **quelconque**.
• f transforme la base canonique en une famille échelonnée en degré donc en une base, donc f est un automorphisme.
• Supposons que $f(P) = Q$. Alors $\forall x \neq 1, (x-1)Q(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$, et en dérivant $Q(x) + (x-1)Q'(x) = P(x)$. Donc $f^{-1} : Q \mapsto Q + (X-1)Q'$.

16. $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ donc je calcule $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$

$A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1/j & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $A^{-1} = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = \begin{cases} -j+1 & \text{si } i = j-1 \\ j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 4-'Sujet A' – D'après E3A - PSI - 2021

17. $\forall n \geqslant 1, \forall t \geqslant 1, |\exp(-t^n)| \leqslant \exp(-t)$ et $t \mapsto \exp(-t) \in L^1([1\,;+\infty[,\mathbb{R})$, donc I_n existe.

18. Théorème de convergence dominée en exploitant la majoration précédente : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

19. Le changement de variable $u = t^n$ $\mathcal{C}^1$ bijectif strictement croissant sur $[1\,;+\infty[$ donne $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\exp(-u)}{u^{(n-1)/n}}\,du$.

20. En appliquant le théorème de convergence dominée aux fonctions $g_n : u \mapsto \dfrac{\exp(-u)}{u^{(n-1)/n}}$, uniformément dominées par $u \mapsto \exp(-u)$ (toujours intégrable !), on montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\exp(-u)}{u^{(n-1)/n}}\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \dfrac{\exp(-u)}{u}\,du$. Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{\exp(-u)}{u}\,du = J$.

21. $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n}$.

Exercice 4-Sujet B – D'après E3A - 2014 - MP

22. Voir cours.

23. (a) $f_n \xrightarrow{CVS} f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1[\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(b) Les f_n sont toutes continues mais pas leur limite : la convergence n'est pas uniforme sur $[0\,;1]$.

24. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) uniformément dominée par f_0 cpm et intégrable, on montre que la suite $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

25. Une intégration par parties en primitivant $x \mapsto x^n$ et dérivant $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ donne la relation voulue.

26. L'application du théorème de convergence dominée donne $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{(\sqrt{x+1})^3}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors $(n+1)u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$.

27. Une nouvelle intégration par parties fournit $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ et $\alpha_3 = \dfrac{3}{4}$ tels que :

$$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,dx.$$

28. À nouveau, $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par le théorème de convergence dominée. Alors

$(n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + o(1)$ donc $u_n = \dfrac{\alpha_1}{n+1} + \dfrac{\alpha_2}{(n+1)(n+2)} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

or $\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n(n+1)}$ donc $u_n = \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{n\alpha_2 - (n+2)\alpha_1}{n(n+1)(n+2)} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

or $\dfrac{n\alpha_2 - (n+2)\alpha_1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{n^2}$ donc $u_n = \dfrac{\alpha_1}{n} + \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}n} - \frac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$