N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition èn expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Durée : 3 heures.

PROBLÈME

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathbb{K}$ désigne le corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une racine cubique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

Les parties I, II, III et IV sont largement indépendantes entre elles.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -18 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'on déterminer a explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.

3. Soit $\Delta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.
4. Déterminer, toujours dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

Partie II - Dans un plan

Dans cette partie, pour tout réel α, on note :

$$\mathrm{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Soit $\theta \in [\,0\,;\,2\pi[$.

5. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_{\mathrm{M}(\theta)}$ de $\mathrm{M}(\theta)$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{M}(\theta)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout α de $\mathbb{R}$,
$$\big(\mathrm{M}(\alpha)\big)^n = \mathrm{M}(n\alpha).$$
7. En déduire une racine cubique de la matrice $\mathrm{M}(\theta)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
8. Quelles sont les solutions de l'équation
$$z^3 = 1$$
dans $\mathbb{C}$?
On notera j et $\overline{j}$ les deux solutions non réelles de cette équation telles que $\mathrm{Im}(j) > 0$.
9. En déduire que la matrice I_2 possède au moins 9 racines cubiques dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
10. Justifier que si B est une racine cubique de I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors son spectre est inclus dans $\left\{1, j, \overline{j}\right\}$.

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A.

III. 1 - Cas lorsque d = n

On suppose dans cette sous-partie que $d = n$ et on note $\mathrm{D} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

11. Montrer que si $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine cubique de D alors Δ et D commutent et Δ est diagonale.
12. En déduire que A possède une unique racine cubique B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Combien A possède-t-elle de racines cubiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

III. 2 - Existence d'une racine cubique dans le cas général

14. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$\mathrm{H}_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

15. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $\mathrm{H}_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

III. 3 - Réduction d'une racine cubique lorsque A est inversible

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \prod_{k=1}^{d} \left(\mathrm{X}^3 - \lambda_k\right)$$

16. Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.

17. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

18. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

IV. Lorsque A n'est pas diagonalisable

Dans cette partie, on s'intéresse aux racines cubiques éventuelles de

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Étudier la diagonalisabilité de A.

20. Justifier l'existence d'une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

21. Dans la suite, on note T la matrice triangulaire égale au second membre de l'égalité précédente.

On suppose qu'il existe $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $U^3 = T$.

Justifier que U et T commutent et en posant a priori $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, montrer que

$$U = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

22. Montrer alors que $a = 0$ puis aboutir à une contradiction.

23. A possède-t-elle une racine cubique ?

FIN