1. $\chi_A = X^2+7X-8=(X-1)(X+8)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable, semblable à $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&-8\end{pmatrix}$.

$E_1=\mathrm{Ker}(A-I_2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-8}=\mathrm{Ker}(A+8I_2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $P=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ convient.

2. $B^3=A \Leftrightarrow P^{-1}B^3P=P^{-1}AP \Leftrightarrow \Delta^3=D$.

3. $D\Delta=\Delta^3\Delta=\Delta^4=\Delta\Delta^3=\Delta D$.

En écrivant $\Delta=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\Delta D=D\Delta \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a&-8b\\c&-8d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\-8c&-8d\end{pmatrix} \Leftrightarrow b=c=0 \Leftrightarrow$ Δ est diagonale.

4. En écrivant $\Delta=\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}$, $\Delta^3=D \Leftrightarrow \begin{cases}a^3=1\\d^3=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\d=-2\end{cases}$ puisque tout nombre réel possède exactement une racine cubique.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des racines cubiques de D est $\mathcal{C}_D=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\right\}$, et celui des racines cubiques de $\mathcal{C}_A=\left\{P\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}P^{-1}\right\}$.

5. $\chi_{M(\theta)}=X^2-2\cos(\theta)X+1$. Son discrimant $\Delta=4(\cos^2(\theta)-1)$ est strictement négatif si $\cos^2(\theta)\neq 1$ donc dans ce cas $\chi_{M(\theta)}$ n'est pas scindé et $M(\theta)$ n'est pas diagonalisable.

Il reste à étudier les cas où $\cos(\theta)=\pm1$ c'est-à-dire $\theta=0$ ou $\theta=\pi$. Or $M(0)=I_2$ et $M(\pi)=-I_2$ sont diagonales donc diagonalisables.

Conclusion : $M(\theta)$ est diagonalisable si, et seulement si, $\theta=0$ ou $\theta=\pi$.

6. On montre par récurrence sur n que $\left(M(\alpha)\right)^n=M(n\alpha)$.

7. Avec $\alpha=\dfrac{\theta}{3}$, $M\left(\dfrac{\theta}{3}\right)^3=M(\theta)$ donc $M\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$ est une racine cubique de la matrice $M(\theta)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8. Les solutions de l'équation $z^3=1$ dans $\mathbb{C}$ sont 1, $j=e^{2i\pi/3}$ et $\bar{j}=e^{-2i\pi/3}$ (racines cubiques de l'unité).

9. Les 9 matrices $\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\eta\end{pmatrix}$ où $(\varepsilon,\eta)\in\left\{1,j,\bar{j}\right\}^2$ sont 9 racines cubiques de I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

10. Si $B^3=I_2$ alors $X^3-1=(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ est annulateur de B. Donc si B est une racine cubique de I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, alors son spectre est inclus dans $\left\{1,j,\bar{j}\right\}$.

11. $D\Delta=\Delta^3\Delta=\Delta^4=\Delta\Delta^3=\Delta D$, comme en 3.
Soit $\Delta=\left(\delta_{i,j}\right)$, $M=\Delta D=(m_{i,j})$ et $N=D\Delta=(n_{i,j})$.
Alors $m_{i,j}=\delta_{i,j}\lambda_j$ et $n_{i,j}=\delta_{i,j}\lambda_i$. Pour $i\neq j$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ donc $m_{i,j}=n_{i,j}$ entraîne $\delta_{i,j}=0$: Δ est diagonale.

12. Soit P inversible telle que $P^{-1}AP=D$.
- Comme en 2., B est une racine cubique A si, et seulement si, $\Delta=P^{-1}BP$ est une racine cubique de D. En particulier Δ doit être diagonale, donc D possède une unique racine cubique : $\Delta=diag\left(\sqrt[3]{\lambda_1},\ldots,\sqrt[3]{\lambda_n}\right)$.
- Donc A possède une unique racine cubique B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $B=P\Delta P^{-1}$.

13. Une racine cubique de D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonale pour les mêmes raisons qu'en 11. Comme 0 est l'unique complexe à ne posséder qu'une racine, considérons deux cas.
- *Premier cas : 0 n'est pas valeur propre de A*

Comme chaque λ_k possède exactement trois racines cubiques complexes, D possède 3^n racines cubiques. Donc A possède exactement 3^n racines cubiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- *Second cas : 0 est valeur propre de A*

Chacun des $n-1$ λ_k non nul possède exactement trois racines cubiques complexes, et 0 n'a qu'une racine cubique. D possède 3^{n-1} racines cubiques. Donc A possède exactement 3^{n-1} racines cubiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

14. $\left(H_p\left(\sqrt[3]{\lambda}\right)\right)^3=H_p(\lambda)$ tout simplement.

15. • Comme A est diagonalisable, en notant μ_k la multiplicité de la valeur propre λ_k pour tout k de $[\![1\,;\,d]\!]$, A est semblable à la matrice diagonale par blocs

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}H_{\mu_1}(\lambda_1)&0&\ldots&0\\0&H_{\mu_2}(\lambda_2)&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\ldots&0&H_{\mu_d}(\lambda_d)\end{pmatrix}$$

• D possède comme racine cubique

$$\Delta = \begin{pmatrix} H_{\mu_1}(\sqrt[3]{\lambda_1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{\mu_2}(\sqrt[3]{\lambda_2}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_{\mu_d}(\sqrt[3]{\lambda_d}) \end{pmatrix}$$

• Alors $P\Delta P^{-1}$ est une racine cubique de A.

16. Si A est inversible, alors $\mathrm{rg}(A) = n$ donc $\ker(A) = \{0\}$, donc 0 n'est pas valeurs propres de A, donc ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont toutes non nulles.

17. • Pour tout k de $[\![1\,;\,d]\!]$, $X^3 - \lambda_k = (X - \sqrt[3]{\lambda_k})(X - j\sqrt[3]{\lambda_k})(X - \bar{j}\sqrt[3]{\lambda_k})$ donc $X^3 - \lambda_k$ est scindé à racines simples.

Donc Q est scindé comme produit de polynômes scindés.

• Il reste à justifier que ses racines sont simples.

Comme les λ_k sont deux à deux distinctes, les $\sqrt[3]{\lambda_k}$ sont deux à deux distinctes car $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est bijective. Les racines réelles sont donc deux à deux distinctes.

Les racines à partie imaginaire strictement positive sont les $j\sqrt[3]{\lambda_k}$ donc sont deux à deux distinctes.

Les racines à partie imaginaire strictement négative sont les $\bar{j}\sqrt[3]{\lambda_k}$ donc sont deux à deux distinctes.

Ainsi les racines de Q sont toutes simples.

18. • $Q(B) = \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(B^3 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{d}(A - \lambda_k I_n)$, or A est diagonalisable avec les $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ pour valeurs propres donc $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$ est annulateur de A. Comme $Q(B) = P(A)$, Q est annulateur de B.

• Q est un polynôme annulateur scindé à racines simples de B, donc B est diagnalisable.

19. $\chi_A = X^2(X-1)$ et $\dim(E_0) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1 < 2 = \mu(0)$ donc A n'est pas diagonalisable.

20. χ_A est scindé donc A est trigonalisable.

En notant f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est A, on va justifier qu'il existe une base dans laquelle la matrice représentant f est la matrice voulue.

• Prenons u_0 un vecteur propre associé à 0, par exemple $u_0 = (1, 0, -1)$. $f(u_0) = 0u_0 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

• On souhaite trouver v_0 tel que $f(v_0) = u_0$. Cela est possible si, et seulement si, $u_0 \in \mathrm{Im}(f)$.

Or $u_0 = -(-1, 0, 3) + 2(0, 0, 1) = -f(e_2) + 2f(e_1) = f(2e_1 - e_2) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $v_0 = (2, -1, 0)$ vérifie $f(v_0) = u_0$.

• Prenons enfin u_1 vecteur propre associé à 1, par exemple $u_1 = (0, 0, 1)$.

• La famille $\mathcal{B} = (u_0, v_0, u_1)$ est une base car $P = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-1 \neq 0$.

• On a alors, par la formule de changement de base, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Comme déjà vu, $TU = T^4 = UT$.

Posons $U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. $TU = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & d & f \\ 0 & g & i \end{pmatrix}$ et $UT = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$, donc $d = f = g = h = c = 0$ et $a = e$. Donc $U = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$

22. On a alors $U^3 = \begin{pmatrix} a^3 & ? & ? \\ 0 & a^3 & ? \\ 0 & 0 & i^3 \end{pmatrix} = T$ donc $a^3 = 0$ et $i^3 = 1$. Donc $a = 0$.

Alors $U^3 = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i^3 \end{pmatrix} \neq T$: ceci est absurde.

23. Ainsi T ne possède par de racine cubique. Or si B était une racine cubique de A, on aurait $\left(P^{-1}BP\right)^3 = P^{-1}B^3P = P^{-1}AP = T$ donc T possèderait une racine cubique, ce qui est exclu. Donc A ne possède pas de racine cubique.