N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition èn expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un unique problème en 4 parties.

Durée : 3 heures.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices nxn à coefficients réels.

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X.

Soit $\mathcal{B}$ une base de X, on note $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ la matrice représentant T dans cette base. On note $N(T)$ le noyau de T et $R(T)$ l'image de T.

On dit que T est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité. On appelle projecteur un endomorphisme P de X idempotent, c'est-à-dire tel que $P^2 = P$. On note I l'endomorphisme identité de X, $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n$ et $\mathbb{O}_n$ la matrice nulle.

1- Traces et projecteurs

Si $\mathbb{A}$ est élément de $\mathcal{M}_n$, on appelle trace de $\mathbb{A}$ le nombre réel suivant :

$$\mathrm{tr}\,(\mathbb{A}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_{\mathrm{i,i}}\,.$$

1. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ éléments de $\mathcal{M}_n$, montrer que $\mathrm{tr}\,(\mathbb{AB}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{BA})$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ associée à T est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

   On appelle trace de T, notée $\mathrm{tr}\,\mathrm{T}$, la valeur commune des traces des matrices représentant T. On dit que la trace est un invariant de similitude.

   Soit P un projecteur de X.
3. Démontrer que $X = R(P) \oplus N(P)$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}\,P = \mathrm{tr}\,\mathrm{P}$.

   On pose $P' = I - P$.

5. Montrer que $R(P') = N(P)$ et que $R(P) = N(P')$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de X est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si l 'endomorphisme S est une somme finie de projecteurs P_i , $i \in [\![1, m]\!]$ alors $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}\,\mathrm{S} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{S}$.

2-Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur P est égal à 1.

8. Démontrer qu 'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $PTP = \mu P$.

   Soit $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ une base de X adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$.
9. Montrer que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant T s 'écrit

$$(1) \qquad \mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ \times & & & \end{pmatrix}.$$

   où μ est le nombre réel dont l'existence a été prouvé en question 8 et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
10. Montrer que si $P'TP'$ n'est pas proportionnel à P', alors $\mathbb{B}$, défini en (1), n 'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $P' = I - P$.

3- Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme T n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas liés (c 'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dans laquelle la matrice $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

   où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n-1}$.
13. En déduire que si $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$ est nulle.

   Soit t_i avec $i = [\![1, n]\!]$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{tr}\,\mathrm{T} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{t_i}$.
14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ a pour éléments diagonaux t_1 et t_2.

   Soit $t \in \mathbb{R}$, on admettra qu'en dimension $n \geq 3$, il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = tL$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$.

15. En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant T s'écrit

$$\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times & \\ \times & & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & & \\ \times & & & & \end{pmatrix}.$$

où $\mathbb{B}$ n'est pas une homothétie.

16. En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in [\![1, n]\!]$.

4 -Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que T est un endomorphisme de X vérifiant $\operatorname{tr} \mathrm{T} \in \mathbb{N}$ *et* $\operatorname{tr} \mathrm{T} \geq \operatorname{rg} \mathrm{T}$. *On pose $\rho = \operatorname{rg} T$ et $\theta = \operatorname{tr} \mathrm{T}$.*

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}_1$ est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

Supposons tout d'abord que $\mathbb{T}_1$ ne soit pas la matrice d'une homothétie.

18. A l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_1' & \mathbb{O} \\ \mathbb{T}_2' & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{T}_1'$ admet comme termes diagonaux des entiers non nuls t_i avec $i \in [\![1, \rho]\!]$.

19. En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que $\mathbb{T}_1$ est la matrice d'une homothétie.

20. Démontrer que là encore, T est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

FIN