

Exercice 1 Exemple de convergence uniforme

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .
- On pose, pour tout $n \geq 1, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. À l'aide du théorème spécial des séries alternées, montrer que pour tout $n \geq 1, R_n$ est bornée sur \mathbb{R} .
- Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .

Solution (Ex.1 – Exemple de convergence uniforme)

- Pour x fixé, le théorème spécial des séries alternées assure la convergence puisque $\left(\frac{1}{n+x^2}\right)_n$ est décroissante de limite nulle.
- Soit $n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x^2} \leq \frac{1}{n+1}$ donc R_n est bornée.
- $\forall n \geq 1, \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\|R_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la convergence est uniforme.

Exercice 2 Exemple de convergence normale

- La série de fonction $\sum f_n$ de l'exercice converge-t-elle normalement ?
- On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$.

La série $\sum g_n$ converge-t-elle normalement ? Et uniformément ?

Solution (Ex.2 – Exemple de convergence normale)

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et la convergence n'est pas normale... ce qui prouve que la convergence uniforme n'entraîne pas la convergence normale pour autant...
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|g_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ (majorant évident, et atteint en 0). Donc $\sum \|g_n\|_\infty$ converge et la convergence est normale, donc uniforme d'après l'exercice précédent.

Exercice 3 Étude d'une fonction définie par une somme

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Convergence simple

Justifier que S est définie sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0; +\infty[$ on pose $h_n(x) = \frac{1}{n+n^2x}$.

2. Exemple de passage du local au global : continuité

- La série de fonctions $\sum h_n$ converge-t-elle normalement sur $]0; +\infty[$?
- Soit $a \in]0; +\infty[$. Justifier que la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.
- En déduire que S est continue sur $]0; +\infty[$.

3. Variations sans dérivation

Sans chercher à dériver S , montrer que S est strictement décroissante.

4. Dérivabilité et classe : variations et convexité

- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et retrouver sa variation.
- Montrer que S est de classe \mathcal{C}^2 et convexe.

5. Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$

- À l'aide du théorème de la double limite, justifier : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier que $S(x) \leq \frac{\pi^2}{6x}$ et retrouver la limite précédente.
- À l'aide du théorème de la double limite, établir que $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}$.
- En se plaçant au voisinage de 0, montrer à l'aide du théorème de la double limite que la convergence de la série $\sum h_n$ n'est pas uniforme sur $]0; +\infty[$.

6. Comparaison série-intégrale : comportement en 0

- Montrer que

$$\forall x > 0, S(x) - \frac{1}{x+1} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq S(x).$$

- En déduire : $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

7. Représentation graphique

- Calculer $S(1)$.
- Représenter graphiquement S en tenant compte de tous les éléments obtenus au cours de cette étude.

Solution (Ex.3 – Étude d'une fonction définie par une somme)

On pose, pour $x > 0$ et sous réserve d'existence, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

- Pour $x \in]0; +\infty[, 0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{x} \times \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_n h_n(x)$ converge par comparaison.

Donc S est définie sur $]0; +\infty[$.

2. a) $\|h_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$.

b) Soit $a \in]0; +\infty[$. $\|h_n\|_{\infty, [a; +\infty[} = \frac{1}{n + n^2 a} \leq \frac{1}{an^2}$ donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

c) Pour $a > 0$, les fonctions h_n sont toutes continues sur $[a; +\infty[$ et la convergence est normale donc uniforme, donc S est continue sur $[a; +\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, S est continue sur $]0; +\infty[$.

3. Soit $0 < x < y$. $S(x) - S(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (h_n(x) - h_n(y)) > 0$ car $\forall n, h_n(x) > h_n(y)$. Donc S est strictement décroissante.

4. Pour tout $n \geq 1$, h_n est de classe \mathcal{C}^2 .

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, h'_n(x) = \frac{-1}{(1 + nx)^2} \text{ et } h''_n(x) = \frac{2n}{(1 + nx)^3}.$$

Soit $a > 0$. Les majorations $\|h'_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{1}{a^2 n^2}$ et $\|h''_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{2}{a^3 n^3}$ justifient la convergence normale donc uniforme des séries $\sum_n h'_n$ et $\sum_n h''_n$ sur tout $[a; +\infty[\subset]0; +\infty[$.

Ainsi S est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et S' et S'' se calculent par dérivation terme à terme. D'où $S' < 0$ et $S'' > 0$: S est strictement décroissante et convexe.

5. Utilisations du théorème de la double limite : comportement en $+\infty$

a) S converge normalement donc uniformément sur $[1; +\infty[$, et pour tout $n \geq 1$, $h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Le théorème de la double limite justifie alors que : $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

b) $\forall x > 0, \forall n \geq 1, 0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{n^2 x}$, d'où $0 \leq S(x) \leq \frac{\pi^2}{6x}$ et par encadrement $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

c) Posons $g_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto xh_n(x) = \frac{x}{n + n^2 x}$.

$$g'_n(x) = \frac{n + n^2 x - n^2 x}{(n + n^2 x)^2} > 0 \text{ donc } \|g_n\|_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \frac{1}{n^2}.$$

La convergence de $\sum_n g_n$ est normale donc uniforme sur $[1; +\infty[$, donc par le théorème de la double limite, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i.e. $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}$.

$$\text{Ainsi } S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

d) Si la convergence était uniforme sur $]0; +\infty[$, puisque $h_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{n}$, la série $\sum_n \frac{1}{n}$ convergerait... ce qui est absurde.

6. Comparaison série-intégrale : comportement en 0

a) $\forall x > 0, \forall n \geq 1, h_{n+1}(x) \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t + t^2 x} \leq h_n(x)$.

En sommant pour n parcourant \mathbb{N}^* ,

$$\forall x > 0, S(x) - \frac{1}{x+1} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} \leq S(x).$$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx} \right) dt = \left[\ln \frac{t}{1+tx} \right]_1^{+\infty} = -\ln(x) + \ln(1+x)$

$$\text{Ainsi : } \forall x > 0, -\ln(x) + \ln(1+x) \leq S(x) \leq -\ln(x) + \ln(x+1) + \frac{1}{1+x}.$$

En divisant par $-\ln(x)$, on obtient $\frac{S(x)}{-\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a1$, i.e. $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 4 Intégrale et somme

On pose, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x & \text{si } x \in]0; 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Soit $x \in [0; 1]$. Justifier l'existence, puis calculer : $f(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

2. Montrer que la convergence de la série des f_n est uniforme sur $[0; 1]$.

3. Intégration terme à terme par CVU sur un segment

$$\text{En déduire l'égalité : } \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Solution (Ex.4 - Intégrale et somme)

Remarque préalable :

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x & \text{si } x \in]0; 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

définit une fonction continue sur $[0; 1]$.

1. • Pour $x = 1, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = 0$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et vaut 0.

• Pour $x \in [0; 1[, \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = (-x^2)^{n+1} \ln x$ donc, puisque $-x^2 \in]-1; 1[$,



$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ existe et vaut } -x^2 \times \frac{1}{1 - (-x^2)} \ln n = \frac{-x^2 \ln x}{1 + x^2}.$$

Finalement : pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \frac{-x^2 \ln x}{1 + x^2}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$.

Notons que $R_N(0) = 0$.

Par le critère spécial des séries alternées, pour $x \in]0; 1]$,

$$|R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \right| \leq x^{2N+4} |\ln x|$$

Étudions $\varphi :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{2N+4} |\ln x| = -x^{2N+4} \ln x$.

$\varphi(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$, et $\forall x \in]0; 1]$,

$\varphi'(x) = -(2N + 4)x^{2N+3} \ln x - x^{2N+3} = -x^{2N+3}((2N + 4) \ln x + 1)$, donc φ atteint

son maximum en $\exp\left(-\frac{1}{2N + 4}\right)$.

$$\text{Il vaut } -\exp\left(-\frac{2N + 4}{2N + 4}\right) \times \left(-\frac{1}{2N + 4}\right) = \frac{1}{2e(N + 2)}$$

Donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{2e(N + 2)}$, et par encadrement $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$: la convergence est bien uniforme sur $]0; 1]$.

3. Rappelons que $\int_0^1 \ln x dx$ converge car $\int_A^1 \ln x dx = -1 - A \ln A + A \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} -1$, ainsi

que $\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$ par équivalence à la première, et $\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} dx$ qui est faussement

impropre puisque $\frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} dx \text{ par linéarité.}$$

Chaque f_n étant continue sur $[0; 1]$ et la convergence étant uniforme, la permutation somme/intégrale est licite :

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x dx$$

Une intégration par parties permettra de conclure :

$$\int_0^1 x^{2n+2} \ln x dx \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{2n+3} dx = -\frac{1}{2n+3}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}, \text{ et enfin}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x^2} dx = -1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 5 Une intégrale somme de série

Intégrations terme à terme sur un intervalle

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} (\exp(e^{-x}) - 1) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$ en justifiant l'existence des deux membres.

2. Proposer un développement analogue en somme de série de $\int_0^1 e^t \ln(t) dt$.

3. En déduire une égalité entre intégrales.

Solution (Ex.5 – Une intégrale somme de série)

1. • $f : x \mapsto \exp(e^{-x}) - 1$ est continue et positive sur \mathbb{R}^+ .

Et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$ avec $x \mapsto e^{-x}$ intégrable.

Donc f est intégrable par équivalence de fonctions positives.

• Avec $u_n = \frac{1}{n!n} > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc le critère de D'Alembert assure la convergence de la série de terme général u_n .

• Écrivons f comme somme d'une série : $\exp(e^{-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n!}$ donc $f(x) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ en posant } f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n!}.$$

• Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

(i) Pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : x \mapsto e^{-nx}/n!$ est continue sur $[0; +\infty[$.

(ii) $\sum_{n \geq 1} f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ sur $[0; +\infty[$.

(iii) f est continue sur $[0; +\infty[$.

(iv) $\sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \times n!}$ converge.

Par le théorème d'interversion,

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx, \text{ i.e. } \int_0^{+\infty} (\exp(e^{-x}) - 1) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}.$$

2. Même idée en écrivant $e^t \ln(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n!}$... et on obtient :

$$3. \int_0^{+\infty} (\exp(e^{-x}) - 1) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!} = \int_0^1 e^t \ln(t) dt$$

Exercice 6 Une intégrale somme de série

Pour tout u de $]0; 1]$, on pose : $f(u) = \frac{\exp(u) - 1}{u}$.

- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ le prolongement obtenu.
- a) Exprimer, pour tout u de $[0; 1]$, $f(u)$ sous forme d'une somme d'une série de fonctions.
b) Montrer finalement que $\int_0^1 \frac{e^u - 1}{u} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$.

Solution (Ex.6 – Une intégrale somme de série)

- $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc $f(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1 \in \mathbb{R}$.
- a) $\forall u \in [0; 1], f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n!}$.
b) • Pour tout n de \mathbb{N}^* , $f_n : u \mapsto u^{n-1}/n!$ est continue sur $[0; 1]$.
• $\sum_{n \geq 1} f_n \xrightarrow{\text{CVS}} f$ sur $[0; 1]$.
• f est continue sur $[0; 1]$.
• $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |f_n(u)| du = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \times n!}$ converge car $\forall n \geq 1, 0 \leq \frac{1}{n \cdot n!} \leq \frac{1}{n!}$ et la série

exponentielle $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ converge.

Par le théorème d'inversion,

$$\int_0^1 f(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(u) du, \text{ i.e.}$$

$$\int_0^{+\infty} (\exp(e^{-x}) - 1) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \times n!}$$

Exercice 7 Harmoniquement

On pose : $\forall x \in]-1; +\infty[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

- Montrer que S est définie, continue et croissante sur $] -1; +\infty[$.
- Calculer $S(x+1) - S(x)$ et en déduire un équivalent de $S(x)$ en -1 .

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

b) En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Solution (Ex.7 – Harmoniquement)

- Montrer que S est définie et continue sur $] -1; +\infty[$.
Surtout ne pas séparer la série en deux séries divergentes!!!

• Je note : $f_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ pour $n \geq 1, x > -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1; +\infty[, |f_n(x)| \stackrel{\text{déf.}}{=} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right| = \frac{|x|}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}.$$

Par convergence de la série de Riemann de paramètre 2, $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $] -1; +\infty[$.

S est définie sur $] -1; +\infty[$.

• Soit a et b tels que $-1 < a < 0$ et $1 < b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\|f_n\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}, \text{ or } \frac{b}{n(n+a)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b}{n^2} \text{ donc}$$

$\sum_{n \geq 1} \frac{b}{n(n+a)}$ converge équivalence, et par comparaison $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [a; b]}$ converge.

La convergence est normale, donc uniforme, sur $[a; b]$. Comme chaque f_n est continue sur $[a; b]$, S est continue sur $[a; b]$. Et comme ceci est valable pour tout a et b tels que $-1 < a < 0 < 1 < b$, S est continue sur $] -1; +\infty[$.

• Chaque f_n est croissante ($f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} > 0$..), donc par sommation S est croissante.

- Soit $x > -1$. Je note $S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x)$.

$$S_N(x+1) - S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1+x} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x}.$$

Passons à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$: $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$.

• Dans $S(x) = S(x+1) - \frac{1}{1+x}$, faisons tendre x vers -1^+ : $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x+1) = S(0)$

par continuité, or $S(0) = 0$. Donc $S(x+1) = o\left(\frac{1}{x+1}\right)$, donc $S(x+1) - \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} -\frac{1}{1+x}$

$$\frac{-1}{x+1}.$$

Ainsi : $S(x) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{-1}{x+1}.$

3. a) $S(0) = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, S(n+1) - S(n) = \frac{1}{n+1}$ donc $S(n+1) = S(n) + \frac{1}{n+1} \dots$
d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

b) *Culture nécessaire* : $S(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$

Par croissance de S : $S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor + 1)$

$$\text{donc } S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor) + \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

$$\text{donc } \frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \leq \frac{S(x)}{\ln x} \leq \frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} + \frac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)}.$$

- $\frac{1}{(\ln x)(\lfloor x \rfloor + 1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ sans souci,
- $\frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} = \frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \times \frac{\ln \lfloor x \rfloor}{\ln x}$ or $\frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln \lfloor x \rfloor} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ (culture!)
- $\ln \lfloor x \rfloor = \ln(x + (\lfloor x \rfloor - x)) = \ln(x(1 + \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}))$

$$\ln \lfloor x \rfloor = \ln x + \ln(1 + \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x \text{ car } \ln(1 + \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Ouf! On a bien : $\frac{S(\lfloor x \rfloor)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, donc par encadrement $\frac{S(x)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$,
 $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$

Exercice 8 Étude d'une fonction définie par une somme

Soit, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$

1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D} de f ? Étudier la continuité de f sur \mathcal{D} .
2. Montrer que f est décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. a) Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}, \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$

b) En posant $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Solution (Ex.8 - Étude d'une fonction définie par une somme)

1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D} de f ? Étudier la continuité de f sur \mathcal{D} .
 - Si $x < 0$, $e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série diverge grossièrement. De même si $x = 0$ car alors $e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$.

Si $x > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m^4}{(e^x)^m} = 0$ par croissance comparée (car $e^x > 1$). Donc $e^{-x\sqrt{n}} = o(1/n^2)$ et la série converge par comparaison à la série de Riemann.

$$\mathcal{D} =]0; +\infty[.$$

• Soit $a \in]0; +\infty[.$

$\forall x \in [a; +\infty[, |e^{-x\sqrt{n}}| \leq e^{-a\sqrt{n}}$ or par ce qui précède $f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-a\sqrt{n}}$ converge.

Donc la série converge normalement donc uniformément sur $[a; +\infty[.$ Comme chaque f_n est continue sur $[a; +\infty[, f$ est continue sur $[a; +\infty[.$ Ceci étant valable pour tout $a \in]0; +\infty[, f$ est continue sur $\mathcal{D}.$

2. Chaque f_n est décroissante sur \mathcal{D} , donc par sommation f est décroissante sur \mathcal{D} :
si $x < y, f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(f_n(x) - f_n(y))}_{>0} > 0.$

3. La convergence de $\sum_n f_n$ est normale donc uniforme sur $[1; +\infty[,$ et

$$\forall n \geq 1, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ tandis que } f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème de la double limite,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1.$$

4. a) Soit $x \in \mathcal{D}.$

Par décroissance de $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ sur $[0; +\infty[,$

$$\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant de $k = 0$ à N la minoration et en passant à $N \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x).$$

En sommant de $k = 1$ à N la majoration et en passant à $N \rightarrow +\infty$:

$$f(x) - e^0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

Ainsi : $\forall x \in \mathcal{D}, \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt.$

b) Or $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} 2ue^{-xu} du \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[2u \frac{e^{-xu}}{x} \right]_0^{+\infty} - \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xu} du = \frac{2}{x^2}.$

On déduit alors de a)

$$1 \leq \frac{x^2}{2} f(x) \leq \frac{x^2}{2} + 1,$$

donc par encadrement $\frac{x^2}{2} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}.$$

Exercice 9 *Domaine de définition troué*

Pour $x \geq 0$, on pose : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Pour quelles valeurs de x dans \mathbb{R}^+ , $S(x)$ est-elle définie ?
2. Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.
3. Étudier la continuité de S sur $]0; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.
4. Dresser le tableau de variation de S en précisant ses limites.

Solution (Ex.9 – Domaine de définition troué)

Pour tout n de \mathbb{N}^* et $x \geq 0$, soit $f_n(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

Pour $x \geq 0$, on pose : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$

1. Si $x \in]0; 1[$, $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ donc $S(x)$ existe par comparaison à la série géométrique.

Si $x = 1$, $f_n(x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ donc la série diverge grossièrement et $S(x)$ n'existe pas.

Si $x > 1$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ donc $S(x)$ existe par comparaison à la

série géométrique de raison $\frac{1}{x} \in]0; 1[$.

Donc S est définie sur $\mathcal{D} =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$

2. $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(1/x) = \frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}} = \frac{x^{2n}}{x^n(x^{2n}+1)} = f_n(x)$, donc $\forall x \neq 0, S(1/x) = S(x).$

3. Étudier la continuité de S sur $]0; 1[$ puis sur $]1; +\infty[$.
Soit $a \in]0; 1[$. La majoration précédente donne $\|f_n\|_{\infty,]0; a]} \leq a^n$. Or la série géométrique $\sum_n a^n$ converge. Donc S converge normalement donc uniformément

sur $]0; a[$. Comme chaque f_n est continue, S est continue sur $]0; a[$. Comme a est arbitraire dans $]0; 1[$, S est continue sur $]0; 1[$.

Comme sur $]1; +\infty[$, $S : x \mapsto S(1/x)$, S est continue sur $]1; +\infty[$ par composition.

4. • Pour tout n , $f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}$ donc f_n est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

Par sommation, S est croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

• Par continuité, $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(0) = 0$.

• $\forall x \in]0; 1[, S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{x}{2(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty,$

donc par comparaison $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

• De $S(x) = S(1/x)$ on tire par composition avec les limites précédentes

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty \text{ et } S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 10 *Non dérivable en 0*

On pose, pour tout x de $]0; +\infty[$ et tout n de \mathbb{N}^* , $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$.

2. La convergence de la série des f_n est-elle uniforme ? normale ?
3. Justifier que S est continue $]0; +\infty[$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

4. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\frac{S(x) - S(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{du}{u(1+u^2)}.$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Solution (Ex.10 – Non dérivable en 0)

On pose, pour tout x de $]0; +\infty[$ et tout n de \mathbb{N}^* , $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$

- Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$.
 $\forall n \geq 1, f_n(0) = 0$ donc $S(0)$ existe.
 $\forall x \neq 0, |f_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 |x|}$ assure la convergence simple de $S(x)$ par équivalence à la série de Riemann de paramètre 3.
- De $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq (1 - n|x|)^2 = 1 + n^2x^2 - 2n|x|$ on tire $2n|x| \leq 1 + n^2x^2$ puis $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$.
 D'où $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n^2}$, ce qui assure la convergence normale, donc uniforme de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur \mathbb{R} .
- La convergence uniforme et la continuité de chaque f_n assure la continuité de S sur \mathbb{R} .
 - Les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et :
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2}$
 Soit $a > 0$ et x tel que $|x| \geq a$. Alors
 $|f'_n(x)| \leq \frac{1 + n^2x^2}{n(1 + n^2x^2)^2} \leq \frac{1}{n(1 + n^2a^2)} \leq \frac{1}{n^3a^2}$
 Donc $\|f'_n\|_{\infty,]-\infty; a] \cup [a; +\infty[} \leq \frac{1}{n^3a^2}$. Ceci assure la convergence normale donc uniforme sur tout $] -\infty; a] \cup [a; +\infty[$ où $a > 0$. Donc que S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- a) Soit $x > 0$.

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + n^2x^2)}$$

Par comparaison à une intégrale :

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1 + t^2x^2)} dt$$

Par le changement $u = tx!$

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} \geq \int_x^{+\infty} \frac{du}{u(1 + u^2)}$$

b) En déduire que S n'est pas dérivable en 0.

Comme $\frac{1}{u(1 + u^2)} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{u}$, par équivalence de fonctions positives avec $u \mapsto \frac{1}{u}$ non

intégrable sur $]0; 1]$, $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u(1 + u^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$: S n'est pas dérivable en 0.

Exercice 11 Une permutation série/intégrale

- Justifier l'existence et calculer la valeur de : $I = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.
 On pose, pour tout n de \mathbb{N} , $f_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x \exp(-(2n+1)x)$.
- a) Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on exprimera à l'aide de la fonction sh.
 b) Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.
- On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt = \frac{\pi^2}{4}$.

Exercice 12 Étude de dérivabilité

On pose, pour tout n de \mathbb{N} et tout x de \mathbb{R} , $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{1 + n^2} e^{-nx}$,

et, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Justifier que f est définie et continue sur \mathcal{D}_f de $f =]0; +\infty[$.
- Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.
- a) La convergence de $\sum f'_n$ est-elle normale sur $]0; +\infty[$? Et sur $[a; +\infty[$ où $a > 0$?

Solution (Ex.12 – Étude de dérivabilité)

- Si $x < 0$, $(f_n(x))$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
 - Si $x \geq 0$, $\left(\frac{1}{1 + n^2} e^{-nx}\right)_n$ est une suite décroissante de limite nulle donc par le théorème de Leibniz, la série converge.
 Donc $\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.
 - D'après le théorème de Leibniz,
 $\forall x \in]0; +\infty[, |R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq |f_{N+1}(x)| \leq \frac{1}{1 + (N+1)^2}$, donc
 $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N^2}$ donc $\|R_N\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.
 La convergence est uniforme et pour tout n , f_n est continue sur $]0; +\infty[$ donc f est continue sur $]0; +\infty[$.
- Pour tout n , f_n est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et on peut raisonner de même pour la majoration du reste :

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f'_n \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{N}, \text{ donc } \left\| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f'_n \right\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

La convergence étant uniforme, la somme f est \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

3. • $\|f'_n\|_{\infty} \geq |f'_n(0)| \geq \frac{n}{1+n^2}$ or $\frac{n}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est la série harmonique

divergente, donc par équivalence de termes généraux positifs, puis par minoration, $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty}$ diverge. La convergence n'est pas normale sur $]0; +\infty[$.

• Soit $a > 0$. Alors (*attention à la place des valeurs absolues!*) :

$$\forall x \geq a, |f'_n(x)|' = -\frac{n^2}{1+n^2} e^{-nx} < 0 \text{ donc :}$$

$$\|f'_n\|_{\infty} = |f'_n(a)| = \frac{n^2}{1+n^2} e^{-na} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (e^{-a})^n,$$

et comme $e^{-a} \in]0; 1[$, la série géométrique de raison e^{-a} converge, donc par équivalence de termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty, [a; +\infty[}$ converge.

Il y a convergence normale sur tout intervalle $[a; +\infty[$ avec $a > 0$... ce qui n'entraîne pas la convergence normale sur $]0; +\infty[$.