

Exercice 1 Détermination de rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n(z)$ dans les cas suivants :

1. $u_n(z) = \frac{n^2 + 1}{3^n} z^n$
2. $u_n(z) = e^{-n^2} z^n$
3. $u_n(z) = \frac{\ln n}{n^2} z^n$
4. $u_n(z) = n! z^n$
5. $u_n(z) = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$
6. $u_n(z) = \frac{\ln n}{e^n} z^{2n+1}$

Solution (Ex.1 – Détermination de rayon de convergence)

Je note a_n le coefficient de z^n dans $u_n(z)$.

1. $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{3n^2} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} |z|$ donc $R = 3$.
2. $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = e^{-2n-1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $R = +\infty$.
3. $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$ car $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + 1/n)}{\ln(n)}$, donc $R = 1$.
4. $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = (n+1) |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $R = 0$ (divergence grossière dès que $z \neq 0$).
5. $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} |z|^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e |z|^3$ donc $R = e^{-1/3}$.
6. $|u_{n+1}(z)u_n(z)| = \frac{\ln(n+1)e^n}{\ln(n)e^{n+1}} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{e}$ donc $R = \sqrt{e}$.

Exercice 2 Rayons de convergence abstraits

On suppose que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R \in]0; +\infty[$.

Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$? Et de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$?

Solution (Ex.2 – Rayons de convergence abstraits)

• Si $|z| < \sqrt{R}$, alors $|z^2| < R$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge.

Si $|z| > \sqrt{R}$, alors $|z^2| > R$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ est \sqrt{R} .

• Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Soit $r \in]0; R[$.
 $\frac{a_n z^n}{n!} = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = (a_n r^n) \text{ car } \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissance comparée.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge puisque $0 < r < R$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument.

Le rayon de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.

Exercice 3 Indéfiniment dérivable

Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est C^∞ sur \mathbb{R} .

Solution (Ex.3 – Indéfiniment dérivable)

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} x^n$. Cette expression est encore valable pour $x = 0$. Donc f est la somme d'une série entière de rayon infini. Donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4 Autour de $(1+x)^\alpha$

1. Déterminer le développement en série entière sur $]-1; 1[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On donnera une expression explicite à l'aide de factorielles de ses coefficients a_n .

2. En déduire que $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ est développable en série entière en 0 en précisant le rayon de convergence et les coefficients de ce développement en fonction des a_n .

Solution (Ex.4 – Autour de $(1+x)^\alpha$)

1. En prenant $\alpha = -1/2$ et $-x^2 \rightarrow x$ dans le DSE de $(1+x)^\alpha$:

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \text{ (Rappel : produit des pairs de 2 à } 2n : 2^n n!, \text{ produit des impairs de 1 à } 2n-1 : \frac{(2n)!}{2^n n!} \dots)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $a_{2n+1} = 0$.

$$2. \forall x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

avec

$$b_0 = a_0 \text{ et } \forall n \geq 1, b_n = a_n + a_{n-1} = \begin{cases} a_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a_{n-1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \text{ cette dernière écriture}$$

étant valable pour $n = 0 \dots$

Exercice 5 De « n » à « $2n$ »

- Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.
- Pour $x \in]-R; R[$, on note $S(x)$ la somme de cette série.
 - Calculer $S(0)$.
 - Pour $x \in]0; R[$, calculer $S(x)$ en observant que $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$.
 - Pour $x \in]-R; 0[$, calculer $S(x)$ en observant que $x^n = (-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}$.

Solution (Ex.5 – De « n » à « $2n$ »)

$$\forall x \neq 0, \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|x|}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc la série converge pour tout } x \text{ et}$$

$R = +\infty$.

Pour $x = 0$, $f(x) = 1$.

$$\text{Pour } x > 0 : f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\text{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Pour } x < 0 : f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n}}{(2n+1)!} \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \sqrt{-x}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$$

Exercice 6 Convergence et valeur au bord du domaine

- Montrer l'existence de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
 - Justifier l'existence, pour $x \in [0; 1]$, de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

- Que vaut, pour $x \in [0; 1[$, $S(x)$?
- Montrer que la série converge uniformément sur $[0; 1]$.
- En déduire la valeur de S .

Solution (Ex.6 – Convergence et valeur au bord du domaine)

- Théorème de Leibniz : $\left(\frac{1}{2n+1} \right)_n$ est décroissante de limite nulle.
- a) Sur $[0; 1[$, S.E. de Arctan. En 1, voir 1).
b) S.E. de R.C. 1 : $\forall x \in [0; 1[, S(x) = \text{Arctan}(x)$.
c) Leibniz : $\forall x \in [0; 1], |R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$. Donc $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{2n+3}$.
d) La convergence de $\sum_n f_n$ est uniforme sur $[0; 1]$ donc la somme est continue sur $[0; 1]$.
- Par continuité de S et Arctan en 1, $S = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$.
On peut aussi invoquer le théorème de la double limite sur $[0; 1[$ puisque la convergence est uniforme.

Exercice 7 Différence de S.E.

$$\text{Soit } f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Montrer que f est développable en série entière, en précisant les coefficients et le rayon de convergence du développement obtenu.

Solution (Ex.7 – Différence de S.E.)

$$1. z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2) = (1-z)(2-z) \text{ donc } \mathcal{D}_f = \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}.$$

$$2. \forall z \in \mathcal{D}_f,$$

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-z/2}. \text{ Pour } z \text{ tel que } |z/2| < 1 \text{ et } |z| < 1, \text{ c'est-à-dire } |z| < 1, \text{ par convergence de la série géométrique,}$$

$$\forall z \in \mathcal{D}(0, 1), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} z^n$$

f étant la somme de deux séries entières de rayons distincts 1 et 2, le rayon de convergence de cette somme est $\min(1, 2) = 1$. Sinon, on peut réveiller M. D'Alembert pour s'en convaincre.

Exercice 8 Expression fonctionnelle d'une S.E.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(n+1)!} x^n$.

On note $f :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ sa somme.

2. Calculer f

- a) en écrivant $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer ;
 b) en écrivant $f(x) = xg(x)$ et en explicitant g .

Solution (Ex.8 – Expression fonctionnelle d'une S.E.)

1. $\forall z \neq 0, \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \frac{(n+1)}{(n+2)n} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série converge pour tout z et $R = +\infty$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} z^n$ ont un rayon de convergence infini (série exponentielle).

Pour $z \neq 0$,

$$S(z) = e^z - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = e^z - \frac{1}{z} (e^z - 1).$$

Pour $z = 0$, $S(z) = 0$.

Exercice 9 En commençant par une dérivation

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

et préciser le rayon de convergence R .

Indication : on pourra commencer par dériver f ...

Solution (Ex.9 – En commençant par une dérivation)

Commençons par dériver f qui est C^∞ sur \mathbb{R} par les théorèmes classiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2 + (1-x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^4}$$

Or par la série géométrique de rayon 1, et comme $|-x^4| < 1 \iff |x| < 1$, on peut écrire, toujours avec un rayon 1 :

$$\frac{1}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}.$$

Donc pour tout $x \in]-1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^{n+1} x^{4n+1}$.

En primitivant, ce qui conserve le rayon,

$\forall x \in]-1; 1[$,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{4n+2} x^{4n+2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{4n+1}.$$

Exercice 10 En commençant par une primitivation

Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$$

et préciser le rayon de convergence R .

Indication : on pourra commencer par primitiver f ...

Solution (Ex.10 – En commençant par une primitivation)

Notons que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3/2\}$, donc le rayon ne pourra excéder $3/2$.

Commençons par primitiver f (une primitive suffit) : $\forall x \in \mathcal{D}_f$,

$$F(x) = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2x+3} = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{1+2x/3}.$$

En utilisant la série géométrique, avec $|2x/3| < 1 \iff |x| < 3/2$,

$$\forall x \in]-3/2; 3/2[, F(x) = \frac{-1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{3^{n+1}} x^n.$$

Alors, par dérivation terme à terme qui conserve le rayon,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-1}}{3^{n+1}} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1)}{3^{n+2}} x^n \text{ avec un rayon de convergence}$$

$$R = \frac{3}{2}.$$

Méthodes alternatives :

– on peut partir du développement de $\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,

avec $\alpha = -2$, $a_n = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} = (-1)^n (n+1)$, puis pour $|x| < 3/2$

$$\frac{1}{(2x+3)^2} = \frac{1}{9((2/3)x+1)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{2}{3}x\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{3^{n+2}} x^n$$

– on peut envisager le produit de Cauchy $\frac{1}{2x+3} \times \frac{1}{2x+3} \dots$

Exercice 11 En formant une équation différentielle

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

- Justifier que f est développable en série entière sur \mathbb{R} .
- Déterminer son développement en série entière au voisinage de 0.
Indication : on pourra commencer par former une équation différentielle dont f est solution...

Solution (Ex.11 – En formant une équation différentielle)

- $x \mapsto e^{-x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à $-x^2$.
 $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière de rayon infini en appliquant la série exponentielle à x^2 , donc sa primitive nulle en 0 aussi.
Donc f est développable en série entière de rayon infini comme produit de série qui le sont.
- f est par conséquent C^∞ sur \mathbb{R} . Commençons par dériver f .
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$.
Utilisons cette équation différentielle pour développer f .
J'écris :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = -2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 1$$

Par unicité des coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul et, avec la valeur de f en 0,

$$\begin{cases} a_0 = f(0) = 0, \\ a_1 = 1, \\ \forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1}. \end{cases}$$

Ceci détermine la suite (a_n) de façon unique :

$$a_0 = 0, a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n.$$

On a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = \frac{-2}{2n+1} a_{2n-1} = \frac{(-2)^2}{(2n+1)(2n-1)} a_{2n-3} = \dots$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-2)^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1} a_1 = \frac{(-2)^n 2^n (n!)}{(2n+1)!}$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Exercice 12 Calcul d'une somme de série

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$$

de deux façons.

- Justifier l'existence de S .
- Première méthode
 - Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}.$$

b) Conclure.

3. *Seconde méthode*

a) Rappeler le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_n \frac{1}{n} x^n.$$

b) Déterminer S en séparant les termes de rangs pairs et les termes de rangs impairs de cette somme.

Solution (Ex.12 – Calcul d'une somme de série)

1. Par exemple, $\frac{1}{(2n+1)4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, t.g. d'une série géométrique convergente.

2. RC = 1, $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

Par primitivation de série entière :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$\text{donc } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; 1[\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Pris en } x = \frac{1}{2}, S = \ln(3).$$

3. Pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} x^n$ conduit à

$$-\ln(1-x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \text{ d'où en } x = 1/2$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right), \text{ donc}$$

$$S = 2\ln(2) + \ln(3) - \ln(4) = \ln(3).$$

Exercice 13 Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série

$$\text{Montrer que } \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solution (Ex.13 – Égalité entre une intégrale impropre et une somme de série)

$$\text{Notons } f(t) = \begin{cases} \frac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Comme $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$, f est continue en 0... et f est intégrable sur $[0; 1]$.

$\forall t \in [0; 1[$, $\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} t^n$ et en primitivant terme à terme :

$$\forall x \in [0; 1[, \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Quand $x \rightarrow 1$, l'intégrale $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ tend vers $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Reste à établir que lorsque $x \rightarrow 1$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = g(1)$, i.e. g est continue en 1.

Or $\left\| x \mapsto \frac{x^n}{n^2} \right\|_{\infty, [0; 1]} = \frac{1}{n^2}$, donc la série de fonctions définissant g converge normalement donc uniformément, et comme chaque $x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$ est continue, donc g est continue sur $[0; 1]$. Donc g est continue en 1. Gagné.

Exercice 14 Application à la résolution d'équations différentielles

Pour les équations différentielles suivantes, on demande de déterminer les solutions développables en séries entières au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence des séries obtenues :

1. (E₀) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$;

2. (E₁) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$;

3. (E₂) $y' - 2xy = 2x^2 - 2x - 1$.

Solution (Ex.14 – Application à la résolution d'équations différentielles)

1. L'ensemble des solutions DSE au voisinage de 0 est

$$\left\{ f :]-\infty; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + bx^2 + \frac{1}{2}x^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. En posant $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R; R[$, y est solution de (E_1) ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, [n(n-1) + 4n + 2]a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0, \text{ i.e. } a_{n+2} = a_n, \text{ donc}$$

$$\text{ssi } f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = \frac{a_0 + a_1 x}{1 - x^2}.$$

Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

L'ensemble des solutions DSE au voisinage de 0 est

$$\left\{ f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{ax+b}{1-x^2}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie (E_2) sur $]-R; R[$ ssi

$$\forall x \in]-R; R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-2a_{n-1})x^n = 2x^2 - 2x + 1 \text{ et par unicité des}$$

coefficients ssi

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = a_0 - 1 \\ 3a_3 = 2a_1 + 2 \\ \forall n \geq 3, a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$$

ssi

$$\begin{cases} a_0 = a_2 + 1 \\ a_1 = -1 \\ \forall p \geq 1, a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \geq 1, a_{2p} = \frac{1}{p!}a_2 \end{cases}$$

$$\text{ssi } y : x \mapsto a_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} x^{2p} - x + 1 = a_2 e^{x^2} - x + 1.$$

Le rayon de convergence de cette série étant $+\infty$, l'ensemble des solutions DSE est

$$\left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a e^{x^2} - x + 1, a \in \mathbb{R} \right\}.$$