Exercice 1 *Intégrale se ramenant à ζ(2)*

1. a) Montrer que le domaine $\mathcal{D}$ de définition de la fonction

$$\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$$

est $]0\,;+\infty[$.

b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

c) Calculer explicitement $\mathrm{S}'(x)$ en fonction de x.

2. a) Justifier que :

$$\forall x>0, 0<\mathrm{S}(x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

b) En déduire la limite de S en $+\infty$.

3. Retrouver la limite précédente à l'aide du théorème de la double limite.

4. Déduire des questions précédentes une expression explicite de S.

5. a) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t.$$

b) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer I.

Solution (**Ex.1 –** *Intégrale se ramenant à ζ(2)*)

1. a) Pour $x<0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement.

Pour $x=0$, la série est une série de Riemann divergente.

Pour $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = \mathcal{O}\left((\mathrm{e}^{-x})^n\right)$ montre la convergence.

$\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$.

b) Posons pour $n \geq 1$, $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

Pour tout n, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ avec $f_n' : x \mapsto -\mathrm{e}^{-nx}$.

(f_n) converge simplement vers S.

Soit $a>0$. $\forall n \geq 1, \|f_n'\|_{\infty,[a\,;+\infty[} = \left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n$ donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ (car série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-a} \in]0\,;1[$).

Donc S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;+\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D} =]0\,;+\infty[$.

c) D'après ce qui précède,

$$\forall x>0, \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$

2. a) Soit $x>0$.

$\mathrm{S}(x)$ est strictement positif comme somme de termes strictement positifs.

$\forall n \geq 1, \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \leq \mathrm{e}^{-nx}$, donc en sommant ces inégalités, $\mathrm{S}(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

b) Par encadrement : $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. • Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

• **Sur $[1\,;+\infty[$**, $\|f_n\|_{\infty,[1\,;+\infty[} = f_n(1) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$ car f_n est positive et décroissante. Or $\displaystyle\sum_n \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$ converge car $\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées, et en raison de la convergence de la série de Riemann de paramètre 2.

Donc $\displaystyle\sum f_n \xrightarrow[\text{sur }[1\,;+\infty[]{\mathcal{CN}} \mathrm{S}$, donc $\displaystyle\sum f_n \xrightarrow[\text{sur }[1\,;+\infty[]{\mathcal{CU}} \mathrm{S}$.

• Le théorème de la double limite assure alors que

$$\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

4. Par primitivation, il existe K tel que : $\forall x>0, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x}) + \mathrm{K}$.

Comme $\mathrm{S}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\mathrm{K}=0$. Donc $\forall x \in \mathcal{D}, \mathrm{S}(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$.

5. a) S est continue positive sur $]0\,;+\infty[$ avec :

• $\mathrm{S}(t) = -\ln\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right) - \ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$ or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente de référence. Par équivalence de fonctions positives, $\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$ existe.

- $S(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}$ or $\int_1^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente de référence. Par équivalence de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ existe.
- Donc $I = \int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ existe.

b)
- Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- S est continue sur $]0\,;+\infty[$.
- $\forall n \geq 0, \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n^2}$ (intégrale de référence) et $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$.

Le théorème d'interversion s'applique :

$$I = \int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$