Polynômes minimaux, interpolations de Lagrange et séries entières matricielles

Exercice 1 *Polynôme minimal, base de Lagrange et puissances d'une matrice*

Soit n un entier naturel au moins égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

1. *Polynôme minimal*

   On note $\mathcal{A}_M$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M :

$$\mathcal{A}_M = \{P \in \mathbb{K}[X] | P(M) = 0_n\}.$$

   a) Justifier que $\mathcal{A}_M$ est non vide.

   b) En considérant la famille $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, montre qu'il existe un polynôme unitaire P de $\mathbb{K}[X]$ annulateur de M.

   c) Soit $\delta = \min\{\deg(P) | P \text{ unitaire et annulateur de } M\}$ le plus bas degré parmi les degrés des polynômes annulateurs de M. On note μ_M un polynôme unitaire annulateur de M de degré δ.
   Montrer que si $P \in \mathcal{A}_M$, alors P est multiple de μ_M.

   d) En déduire que μ_M est l'unique polynôme unitaire annulateur de degré δ.

   e) Montrer finalement que

$$\mathcal{A}_M = \{Q \times \mu_M | Q \in \mathbb{K}_n[X]\}.$$

   Bilan : il existe un unique polynôme unitaire et annulateur de M de degré minimal, et l'ensemble des polynômes annulateurs de M est l'ensemble des multiples de ce polynôme.
   Ce polynôme μ_M s'appelle le *polynôme minimal* de M.

2. *Liens avec le polynôme caractéristique*

   a) Montrer que lorsque χ_M est scindé à racines simples, $\mu_M = \chi_M$.

   b) Est-il vrai que, si M est diagonalisable, alors $\mu_M = \chi_M$?

   c) Est-il vrai que μ_M est toujours à racines simples ?

   d) Justifier que M est diagonalisable si, et seulement si, $\mu_M = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda)$.

3. *Cas des matrices nilpotentes*

   On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$M^{k-1} \neq 0 \text{ et } M^k = 0.$$

   M est dite *nilpotente* et k est son *indice de nilpotence*.

   a) Justifier que $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

   b) Justifier que $\mu_M = X^k$ et que $k \leqslant n$.

4. *Puissances k-ièmes et polynôme minimal*

   On suppose dans cette question que μ_M est scindé à racines simples, notées $z_1, z_2, \ldots, z_\delta$.
   On note $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant\delta}$ la base de Lagrange de $\mathbb{K}_{\delta-1}[X]$ associée aux points $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant\delta}$, de sorte que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\,\delta]\!]^2, \quad L_i(z_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

   a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On note R_k le reste de la division euclidienne de X^k par μ_M.
   Déterminer les coordonnées de R_k dans la base de Lagrange (L_i).

   b) En déduire une expression de M^k à l'aide des polynômes L_i.

Exercice 2 *Séries entières matricielles et interpolation de Lagrange*

On soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence non nulle R. On note f sa somme :

$$f : \mathring{\mathcal{D}}(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $S_k(A)$ désigne la k-ième somme partielle $\sum_{i=0}^{k} a_i A^i$. On remarquera que $S_k(A)$ est un polynôme de degré au plus k de A.
On dit de plus que $f(A)$ existe si la série $\sum_k a_k A^k$ converge, c'est-à-dire si la suite des sommes partielles $(S_k(A))$ converge.
On rappelle que si une suite matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les suites $(AU_k)_k$ et $(U_kA)_k$ convergent, respectivement vers AL et vers LA (c'est une conséquence de la convergence par coordonnées).

1. **a)** On suppose M et D semblables, liée par la relation $D = P^{-1}MP$ où $P \in \mathcal{GL}_n(C)$.
   Quel lien existe entre $S_k(M)$ et $S_k(D)$?
   b) On suppose que D est diagonale : $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Que vaut $S_k(D)$?
2. **a)** Montrer que si D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts et tous dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(0, R)$, alors $f(D)$ existe.
   Expliciter $f(D)$ à l'aide des coefficients de D.
   b) Montrer qu'alors il existe un unique polynôme L de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $f(D) = L(D)$.
3. On suppose que M est diagonalisable, que ses valeurs propres sont deux à deux distinctes et qu'elles vérifient
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \quad |\lambda| < R.$$
   a) Justifier que $f(M)$ existe et qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $f(M) = L(M)$.
   b) On note $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ la base de Lagrange de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de M. Expliciter L dans la base $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$.
4. On suppose dans cette question que f est la fonction exponentielle et que M est diagonalisable.
   a) Que valent les a_k ?
   b) Justifier l'existence de $f(M)$, qu'on appelle encore *exponentielle de M* et que l'on note $\exp(M)$.
   c) Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.
   À l'aide des questions précédentes, exprimer $\exp(M)$.
   d) Même question pour $M = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ (et toujours $\theta \in \mathbb{R}^*$).
5. Soit M est une matrice réelle dont les valeurs propres sont deux à deux distinctes et appartiennent à $]-1\,;\,1[$.
   a) Justifier que $I_n - M$ est inversible.
   b) Justifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} M^k$ existe et que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} M^k = (I_n - M)^{-1}.$$
   c) Justifier qu'il existe un polynôme L dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que
$$L(M) = (I_n - M)^{-1}$$
   en expliquant comment obtenir L.
6. On suppose que M est nilpotente d'indice de nilpotence k.
   Justifier que $I_n - M$ est inversible et donner un polynôme L unitaire de degré $k-1$ tel que
$$L(M) = (I_n - M)^{-1}$$
   .