Exercice 1

Soit f la fonction définie, sous réserve de convergence de la somme, par

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $[-1\,;\,1]$.
2. Expliciter la valeur de $f(x)$ lorsque $x\in\,]-1\,;\,1[$.
3. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\quad\text{et}\quad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}.$$

4. Montrer que $$g:\begin{array}{ccc}]-1\,;\,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1-x)+x}{x-1}\end{array}$$ est développable en série entière en précisant la suite des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le rayon de convergence de la série obtenue.
5. On pose, toujours sous réserve de convergence,

$$h(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n.$$

Déterminer le domaine de définition de h et expliciter sa valeur à l'aide de fonction usuelles.

6. Sur quel intervalle I, le plus grand possible, peut-on écrire

$$\forall x\in \mathrm{I},\quad h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$$

Solution (Ex.1 –)

Soit f la fonction définie, sous réserve de convergence de la somme, par

$$f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n.$$

1. • La théorie des **séries entières** n'assurera **pas la continuité sur le segment** $[-1\,;\,1]$.

   • Je pose, pour tout $n\geqslant 2$ et tout $x\in[-1\,;\,1]$, $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$.

   On a : $\forall n\geqslant 2,\quad \|f_n\|_\infty=\dfrac{1}{n(n-1)}$ donc $\|f_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_n f_n\xrightarrow{\mathcal{CN}}f$,

   donc $\displaystyle\sum_n f_n\xrightarrow{\mathcal{CU}}f$. Comme les f_n sont toutes continues,

   $$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [-1\,;\,1].}$$

2. Par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série définissant f est 1. On a :

   $$\forall x\in\,]-1\,;\,1[,\quad f'(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=\ln(1+x)$$

   En primitivant,

   $\forall x\in\,]-1\,;\,1[,\quad f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+k$ et comme $f(0)=0$,

   $$\boxed{\forall x\in\,]-1\,;\,1[,\quad f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x.}$$

3. • Par 1, f est continue en 1 donc $\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

   Or $(x+1)\ln(x+1)-x\xrightarrow[x\to1]{}2\ln(2)-1$.

   • f est continue en -1 donc $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

   Or $(x+1)\ln(x+1)-x\xrightarrow[x\to-1]{}1$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln(2)-1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1.}$$

4. D'après le cours, $x \longmapsto \ln(1-x)+x$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ sont développables en séries entières de rayon 1 donc leur produit est développable en série entière de rayon au moins 1, d'après la propriété du produit de Cauchy.

Calculons les coefficients du produit en identifiant d'abord ceux des deux facteurs :

$$\forall x \in \,]-1\,;\,1[, \quad \ln(1-x)+x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n + x = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

et $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}-x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \text{ ou } n=1, \\ \dfrac{-1}{n} \text{si } n \geqslant 2, & \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n = 1}$$

Alors $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}-a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant 1 \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$

Comme $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\displaystyle\sum_n C_n1^n$ diverge grossièrement donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n c_nx^n$ est au plus 1.

Donc le rayon de convergence vaut exactement 1 et

$$\boxed{\forall x \in \,]-1\,;\,1[, \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n}$$

5. $h(x)$ est défini si, et seulement si, $-1 \leqslant \dfrac{x}{1-x} \leqslant 1$ puisque $h(x) = f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ et $\mathcal{D}_f = [-1\,;\,1]$.

Je pose, pour $x \neq 0$, $j(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

$j'(x) = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$ donc j est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} j(x) = -1$ et $j(1/2) = 1$, h est définie sur $]-\infty\,;\,1/2]$ mais pas sur $]1/2\,;\,1]$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} j(x) = -1$, $j(x) < -1$ pour $x \in \,]1\,;\,+\infty[$.

$$\boxed{h \text{ est définie sur }]-\infty\,;\,1/2].}$$

Pour tout x de $]-\infty\,;\,1/2]$, $j(x)+1 = \dfrac{1}{1-x}$ et

$$\boxed{h(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{-\ln(1-x)-x}{1-x}.}$$

6. N'oublions pas de tenir compte des ensembles de définition respectifs de g et h : $\mathrm{I} = \,]-\infty\,;\,1/2] \cap \,]-1\,;\,1[\, = \,]-1\,;\,1/2]$.

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I} = \,]-1\,;\,1/2], \quad h(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n.}$$