Solution (Ex.1 –)

1. **Comme a_{n+1} est défini à l'aide de $a_0, a_1, \dots a_n$, on ne peut avoir d'informations sur a_{n+1} que si on dispose d'informations sur TOUS les a_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Une récurrence FORTE s'impose !**
   • La propriété est vraie pour $n = 0$ puisque $a_0 = 1 \in [\,0\,;\,1\,]$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons la propriété vraie à tout rang de $[\![\,0\,;\,n\,]\!]$. Alors $a_{n+1} > 0$ comme somme de termes strictement positif.
   Ensuite pour tout k de $[\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $n-k+2 \geqslant 2$ donc $\dfrac{a_k}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$, et la propriété est démontrée au rang $n+1$.
   • Par récurrence forte,
   $$\forall n \geqslant 0, \quad 0 < a_n \leqslant 1.$$
   ... et même $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ dès que $n \geqslant 1$.

2. **On ne connaît pas la limite de $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, à vrai dire on ne sait même pas si cette limite existe. Il est exclu d'employer le critère de D'Alembert. Argument le plus rapide, et en plus c'est la DÉFINITION :** Par 1., la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Par définition du rayon de convergence, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

3. a) **Sans calcul :**
   $$\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ et } \mathrm{RC}\left(\sum \frac{x^n}{n}\right) = 1 \text{ donc } \mathrm{RC}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+2}\right) = 1.$$

   b) **Il est faut d'affirmer que la série converge « ssi » $|x| < 1$. En cours, j'ai précisé qu'on ne pouvait pas connaître a priori la nature de la série pour $|x| = 1$, et la suite prouve que la série converge en -1 mais diverge en 1.**
   Soit $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$. Par le rayon de convergence précédent, $]-1\,;\,1[\subset \mathcal{D}_g \subset [\,-1\,;\,1\,]$.
   Pour $x = -1$, la série définissant $g(-1)$ converge par application immédiate du théorème des séries alternées.
   Pour $x = 1$, la série définissant $g(1)$ diverge : c'est la série harmonique (privée de son premier terme).
   $$\mathcal{D}_g = [\,-1\,;\,1[\,.$$

   c) • En tant que produit de Cauchy de deux séries de rayon de convergence supérieurs ou égaux à 1, $\mathrm{RC}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n x^n\right) \geqslant 1$.
   • Par la formule de Cauchy : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n-k+2} = (n+1)a_{n+1}$
   $$\forall n \geqslant 0, \quad w_n = (n+1)a_{n+1}.$$

   d) Pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$.

4. Pour $x \in [\,0\,;\,1[$, $f(x) > 0$ comme somme de termes tous positifs, dont le premier a_0 est strictement positif.
   Donc : $\forall x \in [\,0\,;\,1[$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$.
   La primitivation de $\dfrac{f'}{f}$ exige des valeurs absolues et la présence d'une constante additive.
   En primitivant, $\ln|f(x)| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + cte$. Comme $f(x) > 0$ et $\ln(f(0)) = \ln(a_0) = \ln(1) = 0$, $cte = 0$. Donc
   $$\forall x \in [0,1[, \quad \ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

5. **Le plus rapide est de décomposer en éléments simples :**
$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$
Pour $|x| < 1$,
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$, et pour de plus $x \neq 0$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}(-\ln(1-x)-x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} - 1.$$
Alors $\ln(f(x)) = \ln(1-x)\left(\frac{1}{x}-1\right)+1$. Et
$$\forall x \in]0\,;\,1[, \quad f(x) = \mathrm{e}\left(1-x\right)^{\frac{1}{x}-1} \quad \text{et} \quad f(0) = a_0 = 1.$$

6. $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\frac{1}{2} \in \mathcal{D}_f = [-1\,;\,1[$.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Solution (Ex.2 –)

1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont immédiates.
Pour prouver que $\langle .,. \rangle$ est défini, il faut montrer que si $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$ alors P est le POLYNÔME NUL, et pas seulement nul en 1.
Si $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$ alors $\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = \mathrm{P}''(1) = 0$.
Premier argument :
1 est une racine triple de P, et comme $\deg(\mathrm{P}) \leqslant 2$, P est le polynôme nul.
Second argument :
En écrivant $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$,
$$\mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = \mathrm{P}''(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \\ 2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{P} = 0.$$
2. Pour faciliter les calculs, on peut au préalable calculer les produits scalaires entre monômes :
$\langle 1,1\rangle = \langle 1,\mathrm{X}\rangle = \left\langle 1,\mathrm{X}^2\right\rangle = 1$, $\langle \mathrm{X},\mathrm{X}\rangle = 2$, $\left\langle \mathrm{X},\mathrm{X}^2\right\rangle = 3$ et $\left\langle \mathrm{X}^2,\mathrm{X}^2\right\rangle = 9$.
L'application du procédé d'orthonormalisation à partir de la base canonique $\mathcal{C} = (1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$ fournit la base orthonormale
$$\mathcal{B} = \left(1, \mathrm{X}-1, \frac{1}{2}(\mathrm{X}-1)^2\right).$$

3. En s'appuyant sur la base orthonormale $(1,\mathrm{X}-1)$ de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, $p_{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]}(\mathrm{U}) = 2\mathrm{X}-5$ et
$$d(\mathrm{U},\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]) = \|\mathrm{U}-(2\mathrm{X}-5)\| = 2.$$

4. **a)** H est le noyau de la forme linéaire $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(1)$ donc est un sous-espace vectoriel de E. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^1$, la formule du rang assure que
$$\dim(\mathrm{H}) = \dim(\ker(f)) = 3-1 = 2.$$
b) D'après 2 et 4.a), $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2) = \left(\mathrm{X}-1, \frac{1}{2}\left(\mathrm{X}-1\right)^2\right)$ est une base orthonormale de H.
On peut s'appuyer sur cette base orthonormale pour calculer les images de 1, X et X^2... ou ruser un peu en exprimant ces vecteurs dans la base $\mathcal{C}$.
Comme par 2 $1 \perp \mathrm{P}_1$ et $1 \perp \mathrm{P}_2$, $1 \in \mathrm{H}^\perp$ donc $\varphi(1) = 0$.
$\varphi(\mathrm{X}) = \varphi(\mathrm{P}_1+1) = \varphi(\mathrm{P}_1)+\varphi(1) = \mathrm{P}_1+0 = \mathrm{P}_1$,
$\varphi(\mathrm{X}^2) = \varphi(2\mathrm{P}_2 2\mathrm{P}_1+1) = 2\varphi(\mathrm{P}_2)+2\varphi(\mathrm{P}_1)+1 = 2\mathrm{P}_2+2\mathrm{P}_1 = \mathrm{X}^2-1$, d'où
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$