

**Exercice 1** *Minimum et maximum*

On tire successivement une à une et avec remise  $n$  boules dans une urne en contenant  $B$  numérotées de 1 à  $B$ . Soit  $k \in \llbracket 1; B \rrbracket$  fixé. Déterminer la probabilité des événements :

- $S_k$  « le plus grand numéro obtenu est inférieur ou égal à  $k$  »,
- $G_k$  « le plus grand numéro obtenu est vaut  $k$  »,
- $I_k$  « le plus petit numéro obtenu est supérieur ou égal à  $k$  »,
- $P_k$  « le plus petit numéro obtenu est vaut  $k$  ».

**Solution** (Ex.1 – *Minimum et maximum*)

*Première méthode : par explicitation de l'univers et dénombrement*

L'ensemble des tirages possibles (univers) est  $\Omega = \llbracket 1; B \rrbracket^n$  car les tirages se font avec remise. Il est muni de l'équiprobabilité.

On a :  $\text{Card}(\Omega) = B^n$ .

- $S_k = \llbracket 1; k \rrbracket^n$  et par équiprobabilité,  $\mathbb{P}(S_k) = \frac{\text{Card}(S_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{k^n}{B^n}$
- De  $S_k = G_k \dot{\cup} S_{k-1}$  on tire  $\mathbb{P}(G_k) = \mathbb{P}(S_k) - \mathbb{P}(S_{k-1}) = \frac{k^n - (k-1)^n}{B^n}$ , relation valable y compris pour  $k = 1$  car  $\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{B^n}$ .
- $I_k = \llbracket k; B \rrbracket^n$  et par équiprobabilité,  $\mathbb{P}(I_k) = \frac{\text{Card}(I_k)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{(B-k+1)^n}{B^n}$
- De  $I_k = P_k \dot{\cup} I_{k+1}$  on tire  $\mathbb{P}(P_k) = \mathbb{P}(I_k) - \mathbb{P}(I_{k+1}) = \frac{(B-k+1)^n - (B-k)^n}{B^n}$ , relation valable y compris pour  $k = B$  car  $\mathbb{P}(P_B) = \frac{1}{B^n}$ .

*Seconde méthode : par décomposition des événements*

- Soit pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; B \rrbracket$  l'événement  $A_i$  : « le  $i$ -ème numéro est inférieur ou égal à  $k$  ».

$S_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$ , et par indépendance des  $A_i$  car les tirages ont lieu avec remise,

$$\mathbb{P}(S_k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \text{ Or par équiprobabilité } \mathbb{P}(A_i) = \frac{k}{B} \text{ pour tout } i \text{ de } \llbracket 1; n \rrbracket.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(S_k) = \left(\frac{k}{B}\right)^n.$$

- Soit pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; B \rrbracket$  l'événement  $B_i$  : « le  $i$ -ème numéro est

supérieur ou égal à  $k$  ».

$I_k = \bigcap_{1 \leq i \leq n} B_i$ , et par indépendance des  $B_i$  car les tirages ont lieu avec remise,

$$\mathbb{P}(I_k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i). \text{ Or par équiprobabilité } \mathbb{P}(B_i) = \frac{B-k+1}{B} \text{ pour tout } i \text{ de } \llbracket 1; n \rrbracket.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(I_k) = \left(\frac{B-k+1}{B}\right)^n.$$

Pour  $G_k$  et  $P_k$ , on raisonne comme par la Première méthode.

**Exercice 2** *Incompatibles ET indépendants ?*

Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

1. Soit  $A$  et  $B$  deux événements incompatibles et indépendants. Montrer que l'un d'entre eux au moins est impossible.
2. Étudier la réciproque.

**Exercice 3** *Indépendance et contraire*

Soit  $A$  et  $B$  deux événements. Montrer que  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants si, et seulement si,  $A$  et  $B$  le sont.

**Solution** (Ex.3 – *Indépendance et contraire*)

Puisque l'on a une union disjointe (ou FPT avec le SCE  $(B, \bar{B}) \dots$ ),

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup \bar{B})) = \mathbb{P}(A) \text{ car } B \cup \bar{B} = \Omega.$$

Par suite,  $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$  par indépendance

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}).$$

**Exercice 4** *Autour de l'indépendance*

Je dispose d'une pièce juste et d'une pièce truquée pour laquelle probabilité d'obtenir face est  $p$  avec  $0 < p < \frac{1}{2}$ . Je choisis une des pièces au hasard, puis je la lance  $n$  fois de suite avec  $n \geq 2$ . Soit les événements :

- $J$  : « la pièce est juste » ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  : « j'obtiens au face  $n$ -ème lancer » (respectivement).

1. Les événements  $F_1$  et  $F_2$  sont-ils indépendants ?
2. a) Déterminer  $\mathbb{P}(J)$ , puis, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n \stackrel{\text{déf.}}{=} \mathbb{P}_{F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n}(J)$ .  
b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Est-ce moral ?

**Solution (Ex.4 – Autour de l'indépendance)**

Dans cet exercice, j'utilise abondamment la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(J, \bar{J})$  où  $J$  est l'événement « j'ai choisi la pièce juste ».

- $\mathbb{P}(F_1) \stackrel{\text{textFPT}'}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p$  et de même  $\mathbb{P}(F_2) \stackrel{\text{textFPT}'}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p$ .  
 $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \stackrel{\text{textFPT}'}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot p^2$ .  
 $\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \iff \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + p\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + p^2\right) \iff p^2 - p + \frac{1}{4} = 0 \iff \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff p = \frac{1}{2}$ .  
 Comme  $0 < p < \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) \neq \mathbb{P}(F_1 \cap F_2)$  et les événements  $F_1$  et  $F_2$  ne sont pas indépendants.

- $$\mathbf{a)} \mathbb{P}(J) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}_{F_1}(J) = \frac{\mathbb{P}(J \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + p\right)} = \frac{1}{1 + 2p}$$

De la même façon,  $\mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(J) = \frac{1}{1 + 4p^2}$ .

Je viens d'appliquer la formule du pasteur Bayes, sans vraiment la formaliser ...

... de la même façon que précédemment, la formule de Bayes avec le système complet  $(J, \bar{J})$  fournit :

$$p_n = \frac{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1 \cap \dots \cap F_n)}{\mathbb{P}(J)\mathbb{P}_J(F_1 \cap \dots \cap F_n) + \mathbb{P}(\bar{J})\mathbb{P}_{\bar{J}}(F_1 \cap \dots \cap F_n)} = \frac{(1/2) \times (1/2)^n}{(1/2) \times (1/2)^n + (1/2) \times p^n} = \frac{1}{1 + (2p)^n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{(1 + (2p)^n)}{1 + (2p)^{n+1}} > 1 \text{ puisque } 2p < 1 \text{ et } 1 + (2p)^{n+1} < 1 + (2p)^n.$$

- Comme  $0 < 2p < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p)^n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ . Plus j'ai une longue série de *faces* au départ, et plus j'ai de chance de lancer la pièce juste ... moral puisque la pièce truquée désavantage *face*.

**Exercice 5** La somme infernale

Une urne contient 14 boules numérotées de 1 à 14. On en tire 7 au hasard. Quelle est la probabilité que la somme des 7 numéros tirés soit égale à la somme des 7 numéros non tirés ?

**Solution (Ex.5 – La somme infernale)**

$1 + 2 + \dots + 14 = 105$  n'est pas divisible par 2. La probabilité cherchée est nulle.

**Exercice 6** Événement presque-impossible

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On tire successivement des boules suivant le protocole :

- si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule rouge dans l'urne ;
- si elle est blanche, on interrompt les tirages.

- Montrer que l'expérience peut être modélisé par  $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$  en convenant que :

- $\omega = n \in \mathbb{N}^*$  si la boule blanche sort lors du  $n$ -ème tirage ;
- $\omega = 0$  si la boule blanche ne sort jamais.

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule blanche n'est pas sortie durant les  $n$  premiers tirages ».

- Calculer  $\mathbb{P}(B_n)$ . Que signifie l'événement  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$  ?

Calculer sa probabilité. A-t-on  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$  ?

- Que dire de l'événement « la boule blanche sortira de l'urne » ?

**Solution (Ex.6 – Événement presque-impossible)**

• Soit  $N_i$  l'événement « une boule noire sort au  $i$ -ème tirage ». Alors  $B_n = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$ , et par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} \times \dots = \frac{1}{n+1}$$

• La suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  est décroissante car :  $\forall n \geq 1, B_{n+1} = B_n \cap N_{n+1} \subset B_n$ .

Par la propriété de continuité monotone :  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$

• Modélisons l'expérience par l'univers des possibles par  $\Omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$  : une expérience est une suite de 0 (=noire par exemple) ou 1 (=blanche).

Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \{s \in \Omega / \forall k \in \mathbb{N}^*, s_k = 0\} = \{\text{suite nulle}\}$  n'est pas vide, mais pourtant de probabilité nulle.

L'événement  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$  que l'on peut expliciter par « la boule blanche ne sort jamais » est presque-impossible (ou quasi-impossible), ou encore « la boule blanche sort » est presque-sûr (ou quasi-certain).

### Exercice 7 *Jeu équitable*

Deux archers se disputent un match selon les règles suivantes :

- A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche.
- A tire en premier (il tirera donc aux rangs impairs).
- Les réussites aux tirs sont supposées mutuellement indépendantes.
- La probabilité que A touche la cible, à chaque tir, est  $p_1$ .
- De même, la probabilité que l'archer B touche la cible est  $p_2$ .

On note  $q_i = 1 - p_i$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

1. Calculer la probabilité que A l'emporte au rang  $2n + 1$ .
2. Calculer la probabilité que B l'emporte au rang  $2n + 2$ .
3. On note  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) l'événement « A (resp. B) l'emporte ». Calculer  $\mathbb{P}(G_1)$  et  $\mathbb{P}(G_2)$ .
4. Calculer  $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2)$  et en déduire la probabilité que le match dure indéfiniment.
5. a) On dira que le match est équilibré lorsque  $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2)$ .  
Montrer que ceci est réalisé si, et seulement si,  $p_2 = \frac{p_1}{1 - p_1}$ .  
b) Que peut-on dire si  $p_1 = 1/2$ ? Et si  $p_1 > 1/2$ ?

### Solution (Ex.7 – Jeu équitable)

1. En notant  $A_n$  l'événement dont on cherche la probabilité,  $\mathbb{P}(A_n) = p_1(q_1q_2)^n$  car on doit avoir indépendamment  $n$  échecs et un succès de A, et  $n$  échecs de B.
2.  $\mathbb{P}(B_n) = p_2q_2^nq_1^{n+1}$  par un raisonnement analogue.
3.  $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \stackrel{\text{textincomp.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{p_1}{1 - q_1q_2}$  car somme géométrique de raison  $q_1q_2 \in ]0; 1[$ .  
Et de façon analogue :  $\mathbb{P}(G_2) = \frac{q_1p_2}{1 - q_1q_2}$ .

4. Comme  $p_1 + q_1p_2 = (1 - q_1) + q_1(1 - q_2) = 1 - q_1q_2$ ,  $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$  : la probabilité que la match dure indéfiniment est nulle.

$$5. \text{ a) } \mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(G_2) \iff p_1 = q_1p_2 \iff p_2 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1}{1 - p_1}$$

6. a) Si  $p_1 = 1/2$ , alors le jeu équitable si, et seulement si,  $p_2 = 1$ ... logique non ?  
b) Si le jeu est équitable, alors :  $p_1 > 1/2 \implies 1 - p_1 < 1/2 \implies p_2 > 1$ , impossible. Le jeu ne peut pas être équitable si  $p_1 > 1/2$ .

### Exercice 8 *Ruine du joueur*

Un joueur joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Les lancers successifs sont indépendants, et le joueur gagne 1 euro chaque fois qu'il obtient pile et perd un euro pour chaque face. Le joueur doit disposer d'au moins 1 euro pour jouer, et le jeu prend fin dès qu'il est ruiné ou qu'il dispose d'un capital de N euros ( $N \geq 3$  est fixé par avance).

On note  $u_k$  la probabilité que le joueur soit ruiné lorsqu'il possède  $k$  euros au départ du jeu ( $0 \leq k \leq N$ ).

1. On convient que  $u_0 = 1$  et  $u_N = 0$ . Justifier cette convention.
2. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :  
$$\forall k \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket, \quad u_k = \frac{1}{2}u_{k+1} + \frac{1}{2}u_{k-1}.$$
3. Exprimer  $u_k$  en fonction de  $k$  et N.
4. Interpréter, à  $k$  fixé,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_k$ .

### Solution (Ex.8 – Ruine du joueur)

1. S'il possède 0 euro au départ, il ne peut pas jouer et l'événement « être ruiné » est certain. S'il possède déjà N euros, il ne joue pas puisque qu'il dispose du capital requis et ne sera jamais ruiné.
2. Notons  $U_k$  l'événement « le joueur soit ruiné lorsqu'il possède  $k$  euros au départ du jeu » où  $0 \leq k \leq N$ , P l'événement le premier lancer donne *pile*. Avec le système complet  $(P, \bar{P})$ , la formule des probabilités totales donne :  
$$u_k = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(U_k) + \mathbb{P}(\bar{P})\mathbb{P}_{\bar{P}}(U_k) = \frac{1}{2}u_{k-1} + \frac{1}{2}u_{k+1}.$$
3.  $u$  vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique  $x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0$ , dont l'unique

racine est 1.

Donc :  $\exists a, b \in \mathbb{R}, \forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, u_k = 1^k(ak + b) = ak + b$  (on se limite à  $\llbracket 0; N \rrbracket$  car  $\forall k \geq N, u_k = 0 \dots$ )

Avec les conditions limites  $u_0 = 1$  et  $u_N = 0$ ,  $b = 1$  et  $aN + b = 0$  donc  $a = -1/N$ . Ainsi :  $\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, u_k = 1 - (k/N)$ .

À  $k$  fixé,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_k = 1$ , donc avec une fortune initiale fixée  $k$ , plus on fixe le seuil  $N$  grand, et plus on risque de finir ruiné.

### Exercice 10 Séquence pile-pile et séquence pile-face

On dispose d'une pièce, faisant pile avec la probabilité  $p \in ]0; 1[$ . On effectue une séquence infinie de lancers.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux piles consécutifs sans avoir eu auparavant la séquence pile-face ?

Indication : on pourra lister précisément tous les tirages possibles amenant le résultat voulu ou s'appuyer sur le système complet  $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2) \dots$

### Exercice 9 S'arrêter de fumer

Un fumeur veut arrêter de fumer. Il est tiraillé entre le manque de volonté et la mauvaise conscience : s'il a réussi à ne pas fumer un jour, il fume le lendemain avec la probabilité  $1/2$  mais, s'il a fumé un jour, alors il ne fume le lendemain qu'avec la probabilité  $1/4$ . On note  $p_n$  la probabilité qu'il fume le  $n$ -ième jour.

1. Calculer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ .
2. Calculer  $p_n$  en fonction de  $p_1$  et de  $n$ .
3. Donner la limite de  $p_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

### Solution (Ex.9 – S'arrêter de fumer)

1. En utilisant la formule des probabilités totales et le fait que les événements  $F_n$  : « il a fumé le jour  $n$  » et  $\overline{F_n}$  : « il n'a pas fumé le jour  $n$  » forment un système complet d'événements, on obtient :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(F_n)\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{F_n})\mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

2.  $(p_n)$  est arithmético-géométrique. Soit  $\ell = 2/5$ , qui vérifie  $\ell = -\frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}$ .

Alors :  $\forall n \geq 1; p_{n+1} - \ell = \frac{-1}{4}(p_n - \ell)$ ,  $(p_n - \ell)_n$  est géométrique de raison  $-1/4$ .

D'où :  $\forall n \geq 1, p_n = (-1/4)^{n-1}(p_1 - \ell) + \ell$ .

3. Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \ell = \frac{2}{5}$ .

**Solution (Ex.10 – Séquence pile-pile et séquence pile-face)**

Soit  $q = 1 - p$ . Les seuls tirages favorables sont :

$P_1P_2$  de probabilité  $p^2$ ,

$F_1P_2P_3$  de probabilité  $qp^2$ ,

$F_1F_2P_3P_4$  de probabilité  $q^2p^2$ ,

⋮

Notons  $E_n$  l'événement  $F_1 \dots F_n P_{n+1} P_{n+2}$  de probabilité  $q^n p^2$ .

L'événement PP sort avant PF est :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ . Par incompatibilité 2 à 2, sa

probabilité est :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(F_n) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{p^2}{1-q} = p$ .

**Beaucoup plus élégant :** à méditer...

Soit A l'événement « PP sort avant PF ». ( $F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2$ ) étant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap P_2}(A) + \mathbb{P}(P_1 \cap F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(A) = q\mathbb{P}(A) + p^2 \times 1 + pq \times 0 = (1-p)\mathbb{P}(A) + p^2$ , et il n'y a plus qu'à isoler  $\mathbb{P}(A)$  :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{p^2}{p} = p.$$

**Exercice 11** Rang pair ou rang impair

On effectue une succession de lancers d'une pièce dont la probabilité d'amener pile est  $p \in ]0; 1[$  à chaque lancer, indépendamment d'un lancer à l'autre.

1. Montrer que la probabilité que pile apparaisse au moins une fois au cours de ces lancers vaut 1.

C'est un événement « presque-certain » ou « presque-sûr ».

2. Déterminer la probabilité de l'événement I : « le premier « pile » apparaît lors d'un tirage de rend impair ».
3. L'événement I est-il plus probable que son contraire ?

**Solution (Ex.11 – Rang pair ou rang impair)**

Soit pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  l'événement « pile apparaît au  $n$ -ème lancer ».

Soit pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $PP_n$  l'événement « le premier pile apparaît au  $n$ -ème lancer ».

On a :

$\mathbb{P}(PP_n) = \mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n)$ , et par indépendance,

$$\mathbb{P}(PP_n) = \mathbb{P}(\overline{P_1}) \dots \mathbb{P}(\overline{P_{n-1}}) \mathbb{P}(P_n) = (1-p)^{n-1} p.$$

On a :  $I = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} PP_{2k+1}$ , et comme les  $PP_n$  sont deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}(I) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(PP_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k} p = p \sum_{k=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^k = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$

$$\mathbb{P}(I) = \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p}$$

1.  $2-p < 2$  donc  $\mathbb{P}(I) > \frac{1}{2}$ . Donc il est plus probable que le premier « pile » sorte à un rang impair qu'à un rang pair (idem pour le premier « face » d'ailleurs).