Exercice 1 *Matrices de projections orthogonales*

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la formule précédente définit bien un produit scalaire.

2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

3. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$.
Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G.

4. Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 + at + b\mathrm{d}t$ lorsque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Solution (**Ex.1** – *Matrices de projections orthogonales*)

1. Une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{X}; \sqrt{\dfrac{5}{8}}(3\mathrm{X}^2 - 1)\right)$.

2. $1 \in \mathrm{F}$, $\mathrm{X}^2 \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{F}^\perp$ vue la famille orthonormale précédente, donc $\mathcal{M}(p_\mathrm{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\dfrac{3}{2}}\mathrm{X}\right)$ est manifestement une base orthonormale de G. On peut s'en servir pour déterminer $p_\mathrm{G}(\mathrm{X}^2)$. Par ailleurs, on a encore $1 \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{G}$.

Donc $\mathcal{M}(p_\mathrm{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 *Majoration de la somme des $k^{3/2}$ puis des $k^{5/2}$*

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

2. Proposer une majoration analogue de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{5/2}$.

Solution (**Ex.2** – *Majoration de la somme des $k^{3/2}$ puis des $k^{5/2}$*)

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et les vecteurs $x = (1, 2, \ldots, n)$ et $y = (1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n})$...
Il n'y a égalité que si x et y sont colinéaires, donc si $n = 1$...

2. Avec les vecteurs $x = (1, 2, \ldots, n)$ et $y = (1, 2^{3/2}, \ldots, n^{3/2})$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{5/2} \leq \frac{\big(n(n+1)\big)^{3/2}\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{6}}.$$

Exercice 3 *Matrices de projection et symétrie orthogonales*

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique)

1. de la projection orthogonale p sur le plan Q d'équation $x + y + z = 0$;

2. de la symétrie orthogonale s admettant le plan Q pour axe.

Solution (**Ex.3** – *Matrices de projection et symétrie orthogonales*)

1. Il est plus rapide de passer par $\mathrm{Q}^\perp$...
$(x, y, z) \in \mathrm{Q} \iff \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0 \iff (x, y, z) \perp (1, 1, 1)$, donc $\mathrm{Q}^\perp = \mathrm{Vect}((1, 1, 1))$ et une base orthonormale de $\mathrm{Q}^\perp$ est (u) avec $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Donc $p_{\mathrm{Q}^\perp}((x, y, z)) = \langle (x, y, z), u\rangle\, u = \dfrac{1}{3}(x + y + z)$.

D'où $\mathcal{M}_\mathcal{B}(p_{\mathrm{Q}^\perp}) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Or $p_\mathrm{Q} + p_{\mathrm{Q}^\perp} = id_\mathrm{E}$ donc $\mathcal{M}_\mathcal{B}(p_\mathrm{Q}) = \mathrm{I}_3 - \mathcal{M}_\mathcal{B}(p_{\mathrm{Q}^\perp}) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $s = 2p_\mathrm{Q} - id_\mathrm{E}$ donc $\mathcal{M}_\mathcal{B}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geq 1$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose, pour A et B dans E, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{A}.\mathrm{B})$.

1. Montrer que
$$\forall \mathrm{A} = (a_{i,j}), \mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \sum_{(i,j)\in[\![1\,;\, n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$
2. Vérifier que $\langle .,. \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?
4. Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. Déterminer $\Delta^{\perp}$.
5. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
6. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Déterminer $\mathrm{F}^{\perp}$.
7. Déterminer la projection orthogonale p_{F} sur F, puis la projection orthogonale $p_{\mathrm{F}^{\perp}}$ sur $\mathrm{F}^{\perp}$.
8. Soit J_n la matrice de E dont tous les coefficients valent 1. Déterminer la distance de J_n à F, définie par : $d(\mathrm{J}_n, \mathrm{F}) = \min\limits_{\mathrm{A}\in\mathrm{F}} ||\mathrm{J}_n - \mathrm{A}||$.

Solution (**Ex.4** – *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

1. Calculons explicitement $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ en fonction des coefficients de A et B.
$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\,(()\ {}^{t}\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ({}^{t}\mathrm{A})_{i,j} (\mathrm{B})_{j,i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{j,i} \right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{j,i} b_{j,i}$$
ce qui est la somme voulue, quitte à permuter le nom des indices muets.
À retenir :
$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices A et B... exactement comme le produit canonique de $\mathbb{R}^n$.
En particulier, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{A} \rangle = \sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$ est la somme des carrés des coefficients de A.

2. $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire car la transposition et la trace le sont.
$\langle .,. \rangle$ est symétrique car $\mathrm{Tr}\left(\left({}^{t}\mathrm{AB}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^{t}\left({}^{t}\mathrm{BA}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left({}^{t}\mathrm{BA}\right)$.
est positif, et ne s'annule que si tous les coefficients de A sont nuls, i.e. si $\mathrm{A} = 0$.
$\langle .,. \rangle$ est positif et défini.

3. Comme vu plus haut, $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle$ est la somme des produits coefficient par coefficient des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$.
Si $(i,j) \neq (k,\ell)$, le seul « 1 » des matrices $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$ n'est pas au même endroit, donc tous les produits sont nuls, donc $\langle \mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{k,\ell} \rangle = 0$
De plus, $||\mathrm{E}_{i,j}||^2$ est la somme des carrés de ses coefficients, donc vaut 1.
Ainsi la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

4. Déterminer $\Delta^{\perp}$ (on pourra commencer par déterminer une base orthonormale de Δ). La famille $(\mathrm{E}_{i,i})_{i\in[\![1\,;\, n]\!]}$ est une base de Δ, orthonormale puisque extraite d'une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
• Première approche -
Alors, par complétion en une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left((\mathrm{E}_{i,j})_{i\neq j}\right)$ est le supplémentaire orthogonal de Δ...
• Seconde approche -
Si $\mathrm{A} \in \Delta^{\perp}$, alors $\mathrm{A} \perp \mathrm{E}_{i,i}$ pour tout i. Or $\langle \mathrm{A}, \mathrm{E}_{i,i} \rangle = a_{i,i}$, donc $a_{i,i} = 0$ pour tout i.
• Bilan, par l'une ou l'autre approche -
$\Delta^{\perp}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice 5 *Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

1. Quel est le minimum de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ pour f continue strictement positive sur $[\,a\,;\ b]$?
2. Soit $a < b$. Montrer que, pour toute fonction f continue sur $[\,a\,;\ b]$,
$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right)^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_0^1 \left(f(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Solution (**Ex.5** – *Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*)

1. Soit $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels.
On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = (a_i, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = \dfrac{1}{n}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$.
Alors $\left(\langle x, y \rangle\right)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{n} \right)^2 = \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \right)^2$ est le carré de la moyenne des $(a_i)_i$.
Et $||x||^2\, ||y||^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(n \times \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$ est la moyenne des carrés des $(a_i)_i$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité voulue... avec égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux entre eux.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On pose : $x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a_i}} \right)_{1\leq i\leq n}$, $y =$

$(\sqrt{a_i})_{1\leq i\leq n}$. $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) = ||x||^2\,||y||^2 \geq \langle x,y\rangle^2 = n^2$.
Ce minorant est atteint pour $a_1 = \cdots = a_n = 1$ par exemple.

3. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[\,a\,;\ b]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue strictement positive.
On pose $x = \sqrt{f}$ et $y = 1/\sqrt{f}$.
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = ||x||^2\,||y||^2 \geq \langle x,y\rangle^2 = \left(\int_a^b 1\mathrm{d}t\right)^2 = (b-a)^2$$
Ce minorant est atteint pour $f = 1$ par exemple, donc c'est un minimum.

4. On munit l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[\,a\,;\ b]$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Soit f continue. Alors
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \left\langle f, t\mapsto \frac{1}{b-a}\right\rangle^2$$
$$||f||^2\left|\left|t\mapsto \frac{1}{b-a}\right|\right|^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\int_0^1 \left(f(t)\right)^2\mathrm{d}t$$
d'où l'inégalité par Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 *Étude d'un endomorphisme*

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ telle que (a,b) soit une famille orthonormale.
On définit sur E l'application f par :
$$\forall x\in\mathrm{E},\quad f(x) = \langle a,x\rangle\, b - \langle b,x\rangle\, a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $\mathrm{Ker}f$.
b) Déterminer $\mathrm{Im}f$, en en précisant une base.
c) Justifier que $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que : $\quad \forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\quad \langle f(x),y\rangle = -\langle x,f(y)\rangle$.

Solution (**Ex.6** – *Étude d'un endomorphisme*)

1. $\forall x\in\mathrm{E}, f(x)\in\mathrm{E}$ puisque $a,b\in\mathrm{E}$.
$\forall x,y\in\mathrm{E},\forall\lambda\in\mathbb{R}, f(\lambda x+y) = \langle a,\lambda x+y\rangle\, b - \langle b,\lambda x+y\rangle\, a = \lambda(\langle a,x\rangle\, b - \langle b,x\rangle\, a) + (\langle a,y\rangle\, b - \langle b,y\rangle\, a) = \lambda f(x) + f(y)$.

2. a) Comme (a,b) est libre car orthonormale,
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow (\langle a,x\rangle = 0 \text{ et } \langle b,x\rangle = 0) \Longleftrightarrow x\in(\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.
$\mathrm{Ker}f = (\mathrm{Vect}(a,b))^{\perp}$.
b) $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ par définition de f. De plus, $f(a) = ||a||^2\, b = b$ donc $b\in\mathrm{Im}f$, et $f(b) = -||b||^2\, a = -a$ donc $a\in\mathrm{Im}f$. Donc $\mathrm{Vect}(a,b)\subset\mathrm{Im}f$.
$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(a,b)$.
c) $\mathrm{Ker}f = (\mathrm{Im}f)^{\perp}$ donc $\mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont supplémentaires (l'un est l'orthogonal de l'autre).

3. $\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2$,
$$\begin{aligned}\langle f(x),y\rangle &= \langle\langle a,x\rangle\, b - \langle b,x\rangle\, a, y\rangle = \langle a,x\rangle\langle b,y\rangle - \langle b,x\rangle\langle a,y\rangle\\ &= \langle\langle b,y\rangle\, a,x\rangle - \langle\langle a,y\rangle\, b,x\rangle = \langle\langle b,y\rangle\, a - \langle a,y\rangle\, b, x\rangle = \langle -f(y),x\rangle\\ &= -\langle f(y),x\rangle = -\langle x,f(y)\rangle.\end{aligned}$$
On dit que f est antisymétrique.

4. Utilisons la question précédente.
$\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2$, $\langle f\circ f(x),y\rangle = -\langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,f\circ f(y)\rangle$
Donc $f\circ f$ est symétrique.

Exercice 7 *Matrice de projection symétrique*

Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$.

1. Justifier que A est diagonalisable avec $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$.

Solution (**Ex.7** – *Matrice de projection symétrique*)

1. $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ donc A est une matrice de projecteur, donc diagonalisable et semblable à $\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c}\mathrm{I}_r & 0\\ \hline 0 & 0_{n-r}\end{array}\right)$. En particulier, $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(()\,\mathrm{A})$.

2. $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D}) \overset{\mathrm{D}^2=\mathrm{D}}{=} \mathrm{Tr}\left(\mathrm{D}^2\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\mathrm{A}\right) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$.

3. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$ aux vecteurs :
$x = (|a_{1,1}|,\ldots,|a_{n,n}|)$ et $y = (1,\ldots,1)$,
$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}| = |\langle x,y\rangle| \leq ||y||\,||x|| \leq \sqrt{n^2}\times\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2} \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}.$$