Exercice 1 *Matrices de projections orthogonales*

Dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la formule précédente définit bien un produit scalaire.

2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

3. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X}^2)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(1, \mathrm{X})$.
Déterminer les matrices dans la base canonique des projections orthogonales sur F puis sur G.

4. Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2 + at + b\mathrm{d}t$ lorsque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 *Majoration de la somme des $k^{3/2}$ puis des $k^{5/2}$*

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

2. Proposer une majoration analogue de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{5/2}$.

Exercice 3 *Matrices de projection et symétrie orthogonales*

Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire canonique)

1. de la projection orthogonale p sur le plan Q d'équation $x + y + z = 0$;

2. de la symétrie orthogonale s admettant le plan Q pour axe.

Exercice 4 *Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $n \geq 1$ et $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose, pour A et B dans E, $\quad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\,({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}.\mathrm{B})$.

1. Montrer que

$$\forall \mathrm{A} = (a_{i,j}), \mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \sum_{(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2} a_{i,j} b_{i,j}.$$

2. Vérifier que $\langle ., . \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle une base orthonormale ?

4. Soit Δ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales.
Déterminer $\Delta^{\perp}$.

5. Montrer que le sous-espace des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.

6. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$. Déterminer $\mathrm{F}^{\perp}$.

7. Déterminer la projection orthogonale p_{F} sur F, puis la projection orthogonale $p_{\mathrm{F}^{\perp}}$ sur $\mathrm{F}^{\perp}$.

8. Soit J_n la matrice de E dont tous les coefficients valent 1. Déterminer la distance de J_n à F, définie par : $d(\mathrm{J}_n, \mathrm{F}) = \min\limits_{\mathrm{A} \in \mathrm{F}} ||\mathrm{J}_n - \mathrm{A}||$.

Exercice 5 *Deux applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

1. Quel est le minimum de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ pour f continue strictement positive sur $[\,a\,;\,b\,]$?

2. Soit $a < b$. Montrer que, pour toute fonction f continue sur $[\,a\,;\,b]$,

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_0^1 \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 *Étude d'un endomorphisme*

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ telle que (a, b) soit une famille orthonormale.
On définit sur E l'application f par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \langle a, x \rangle\, b - \langle b, x \rangle\, a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2. a) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

b) Déterminer $\mathrm{Im} f$, en en précisant une base.

c) Justifier que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que : $\quad \forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

Exercice 7 *Matrice de projection symétrique*

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$.

1. Justifier que A est diagonalisable avec $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$.

2. Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\mathrm{rg}(\mathrm{A})}$.