Table des matières

1 Nombres réels et complexes

1.1 Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

$\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est un majorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$.

$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de P si $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$.

1.2 Maximum et minimum d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit $\mathrm{P} \subset \mathbb{R}$.

(i) $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est le maximum de P si $\mathrm{M} \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, x \leq \mathrm{M}$. On note alors $\mathrm{M} = \max(\mathrm{P})$.

(ii) $m \in \mathbb{R}$ est le minimum de P si $m \in \mathrm{P}$ et $\forall x \in \mathrm{P}, m \leq x$. On note alors $m = \min(\mathrm{P})$.

☞ Toute partie même non vide de P n'admet pas nécessairement un maximum et/ou un minimum.

1.3 Borne supérieure et borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$

(i) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(\mathrm{P})$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \iff \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$. (ii) Toute partie P *non vide et majorée* de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure notée $\sup(\mathrm{P})$: c'est le plus petit de ses majorants.

Caractérisation : $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{P}) \iff \forall x < \mathrm{M},\ \exists y \in \mathrm{P},\ x < y \leq \mathrm{M}$.

1.4 Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est définie par :

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et } quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

1.5 Segments et intervalles de $\mathbb{R}$

(i) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Le *segment* $[\,a\,;\ b]$ est défini par

$$[\,a\,;\ b] \overset{\text{déf.}}{=} \left\{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\right\}.$$

(ii) Une partie P de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si,

$$\forall (a,b) \in \mathrm{P} \text{ avec } a \leq b, \quad [\,a\,;\ b] \subset \mathrm{P}.$$

1.6 Inégalité triangulaire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|.$$

1.7 Formulaire dans $\mathbb{C}$

① $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

② $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\mathcal{R}e(z)}\mathrm{e}^{i\mathcal{I}m(z)}$

③ $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z|^2 = z\overline{z}$ et $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{re(z)}$

④ Euler : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$

⑤ De Moivre : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = 1 \quad \iff \quad \exists! k \in [\![\,0\,;\ n-1]\!]\,,\ z = \omega_k \overset{\text{déf.}}{=} \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$

⑦ $\mathbb{U}_n = \{\omega_k | k \in [\![\,0\,;\ k-1]\!]\}$ et $\forall n \geq 1, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$

1.8 Formulaire trigonométrique

① $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

② $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1,\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

③ $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$

$\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$

$\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$

④ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$, $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

⑤ $a\cos(t) + b\sin(t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\varphi)$ où $\begin{cases} \cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

1.9 Équation du second degré à coefficients réels

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad ax^2 + bx + c = 0$.

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$.

① Si $\Delta > 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, racines réelles distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $x = \dfrac{-b}{2a}$, racine réelle double.

③ Si $\Delta < 0$, alors $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, racines complexes conjuguées.

1.10 Équation du second degré à coefficients complexes

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et (E) : $\quad az^2 + bz + c = 0$.

Soit $\Delta \overset{\text{déf.}}{=} b^2 - 4ac$ et δ tel que $\delta^2 = \Delta$

① Si $\Delta \neq 0$ alors $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$, racines distinctes.

② Si $\Delta = 0$, alors $z = \dfrac{-b}{2a}$, racine double.

1.11 Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

$$\begin{cases} a + b = \mathrm{S} \\ ab = \mathrm{P} \end{cases} \iff \begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont les solutions de} \\ z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0. \end{cases}$$

1.12 Coefficients binomiaux, formule du binôme

① $\dbinom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n sans tenir compte de l'ordre. C'est aussi le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à $n$éléments.

② $\dbinom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$

③ $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, relation de Pascal : $\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$

④ Formule du binôme de Newton : $\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

2 Suites et sommes de référence

2.1 Suites arithmétiques

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *arithmétique de raison* $r \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} - u_n = r.$$

On notera que la raison r est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- $\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$;
- $\forall n \geq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \frac{(n - n_0 + 1)(u_{n_0} + u_n)}{2}$,

alias : $\dfrac{(\textit{nombre de termes}) \times (\textit{premier terme} + \textit{dernier terme})}{2}$

2.2 Suites géométriques

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

On notera que la raison q est indépendante de l'indice n.

② Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.

- $\forall n \geq n_0, \quad u_n = q^{n-n_0} u_{n_0}$;
- $\forall n \geq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \begin{cases} u_{n_0} \dfrac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q} \text{si } q \neq 1 \\ (n - n_0 + 1) u_{n_0} \text{si } q = 1 \end{cases}$

alias : $(\textit{premier terme}) \times \dfrac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - \textit{raison}}$

- Si $u_{n_0} \neq 0$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} sign(u_{n_0}) \times (\infty) & \text{si } q > 1 \\ u_{n_0} & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ n'existe\ pas & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3 Suites arithmético-géométriques

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est *arithmético-géométrique* si, et seulement si,

$$\exists a \neq 1, \exists b \neq 0, \forall n \geq n_0, \qquad u_{n+1} = au_n + b \qquad (\mathcal{R})$$

On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② Comme $a \neq 1$, il existe un unique réel ℓ tel que $(\mathcal{E})$: $\quad \ell = a\ell + b$.
$(\mathcal{R}) - (\mathcal{E})$ donne : $\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$.
La suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a, de premier terme $u_{n_0} - \ell$, et on a :
$$\forall n \geq n_0, \qquad u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) + \ell.$$
③ Deux interprétations pour ℓ. D'une part, la suite $(\ell)_{n \geq n_0}$ est l'unique suite constante vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R})$. D'autre part (lorsque $u_{n_0} \neq \ell$), la suite u converge si, et seulement si, $a \in \,]-1\,;\,1[$. Et alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

① La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre 2* si, et seulement si,
$$\exists a \in \mathbb{K}, \exists b \in \mathbb{K}^*, \forall n \geq n_0, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \qquad (\mathcal{R}).$$
On notera que les paramètres a et b sont indépendants de l'indice n.

② **Théorème dans** $\mathbb{R}$, *i.e.* quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{R}^4$.
Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:
$$(\mathcal{E}) \qquad x^2 - ax - b = 0.$$
• *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
• *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine réelle r.
Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha + \beta n) r^n$.
• *Troisième cas :* $(\mathcal{E})$ ne possède pas de racine réelle mais deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$.
Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)) r^n$.

③ **Théorème dans** $\mathbb{C}$, *i.e.* quand $(a, b, u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in \mathbb{C}^4$.
Soit $(\mathcal{E})$ l'équation caractéristique associée à la relation $(\mathcal{R})$:
$$(\mathcal{E}) \qquad x^2 - ax - b = 0.$$
• *Premier cas :* $(\mathcal{E})$ possède deux racines complexes distinctes r_1 et r_2.
Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$.
• *Deuxième cas :* $(\mathcal{E})$ possède une unique racine complexe r.
Alors : $\exists!(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \geq n_0, \qquad u_n = (\alpha + \beta n) r^n$.

2.5 Sommes finies de référence

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; ③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

④ $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n, i \neq j} a_i a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

2.6 Gestion des sommes doubles

Cas d'indices indépendants
$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} u_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq i \leq m, 1, \leq j \leq n} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} u_{i,j}\right)$$
Cas d'indices dépendants
$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} u_{i,j}\right) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=j}^{m} u_{i,j}\right)$$

3 Théorèmes de première année sur les suites

3.1 Suite bornée, minorée, majorée

Notez que dans les définitions suivantes, les réels B, m *et* M *sont indépendants de l'indice (muet)* n *et ne dépendent que de la suite* u *considérée.*

① La suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* si, et seulement si,
$$\exists \mathrm{B} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \mathrm{B}.$$
② La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *minorée* si, et seulement si,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq u_n.$$
③ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est *majorée* si, et seulement si,
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \mathrm{M}.$$
④ La suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, elle est à la fois minorée et majorée.

3.2 Définition de la convergence d'une suite

La suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si,
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$
On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

3.3 Corollaire immédiat pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

À savoir justifier.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \text{ si, et seulement si,}$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \textit{ tq } a < \ell < b, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad a < u_n < b.$$

3.4 Unicité de la limite

Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.

3.5 Limites infinies

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si,
$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \geq \mathrm{M}.$$
On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

La suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si, et seulement si,
$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n \leq \mathrm{M}.$$
On écrit alors : $\quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

3.6 Théorème de convergence monotone

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.

u est convergente si, et seulement si, u est majorée.

u diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, u n'est pas majorée.

On notera que, pour une suite u croissante, « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ » a toujours un sens.

3.7 Suites extraites

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite.

① Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application **strictement croissante**.

La suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est appelée *suite extraite* de la suite u. La fonction φ est appelée *fonction extractrice.*

② Les exemples les plus fréquents de suites extraites de u sont les suites (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

③ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, toute suite extraite de u converge vers ℓ.

④ La suite u converge vers le scalaire ℓ si, et seulement si, les deux suites extraites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

On utilise fréquemment ④ ou ③ pour **justifier qu'une suite diverge**.

3.8 Théorème des suites adjacentes

• Deux suites u et v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* si

① l'une croît,

② l'autre décroît,

③ la suite $v - u$ converge vers 0.

• Si les suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes, vers une même limite.

De plus, si u croît, v décroît et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad u_m \leq \ell \leq v_n.$$

3.9 Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$, *i.e.* a est un point de I ou une borne de I, éventuellement égale à $-\infty$ ou $+\infty$.

Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $u \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ de limite a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ tend vers ℓ.

4 Théorèmes d'analyse de première année

4.1 Théorème de Rolle

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors : $\exists c \in\ ]\,a\,;\ b[, \quad f'(c) = 0$.

4.2 Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

Alors : $\exists c \in\ ]\,a\,;\ b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4.3 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{R}$

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

① **On suppose qu'il existe $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$** tels que : $\forall x \in\ ]\,a\,;\ b[\,, m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$.
Alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.

② **On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$** tels que : $\forall x \in\ ]\,a\,;\ b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$.
Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b-a|$.

4.4 Inégalité des accroissements finis dans $\mathbb{C}$

Soit $a < b$ et $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[\,a\,;\ b]$ et dérivable sur $]\,a\,;\ b[$.

On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in\ ]\,a\,;\ b[\,, |f'(x)| \leq \mathrm{M}$.

Alors : $|f(b) - f(a)| \leq \mathrm{M}\,|b-a|$.

4.5 Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

Si $f'(x)$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) en a, alors $\dfrac{f(x)-f(x)}{x-a}$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

En particulier, si ℓ est finie, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

4.6 Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

4.7 Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4.8 Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On **suppose qu'il exsite** une constante M telle que $\forall x \in \mathrm{I}, \left|f^{(n+1)}\right| \leqslant \mathrm{M}$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, \left| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) + - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}.\,|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

4.9 **Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

$$\forall h\ tq\ a+h \in \mathrm{I},\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o\big(h^n\big)$$

4.10 **Sommes de Riemann**

Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$. Soit $f : [\,a\,;\ b] \to \mathbb{R}$.

Soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad s_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{n=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ et $\mathrm{S}_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{n=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

Si f est continue sur $[\,a\,;\ b]$, alors :

$$s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

4.11 **Convexité**

① f est convexe sur I si
$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \forall \lambda \in [\,0\,;\ 1\,]\,, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

② Si f est convexe, alors $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.

③ Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe si, et seulement si, $f'' \geqslant 0$.

5 Équations différentielles

1. **Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1**

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues.

$$(\mathcal{E})\ y' + a(t)y = b(t),$$
$$(\mathcal{E}_0)\ y' + a(t)y = 0.$$

Résolution de l'équation homogène

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_\prime)$ est

$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto k\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}, k \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}\big)$$

où A désigne une primitive de a sur I.

☞ Si on ne sait pas expliciter A (i.e primitiver a), on peut écrire en vertu du théorème fondamental de l'analyse

$$\mathrm{E}_0 = \left\{t \mapsto k\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}u\right), k \in \mathbb{K}\right\}$$

2. **Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition**

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

3. **Recherche d'une solution particulière par la méthode de la « variation de la constante »**

On cherche une solution $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ de la forme

$$z(t) = k(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}.$$

☞ Si on ne se trompe, les « $k(t)$ » se simplifient et on doit obtenir

$$k'(t) = b(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}u\right)$$

Il reste à primitiver pour obtenir une solution.

4. **Théorème de Cauchy linéaire**

Soit $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

5. **Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants**

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continue.

$$(\mathcal{E})\ y'' + ay' + by = c(t),$$
$$(\mathcal{E}_0)\ y'' + ay' + by = 0.$$

L'équation caractéristique associé à $(\mathcal{E}_0)$ est

$$(\mathcal{EC})\ z^2 + az + b = 0.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Résolution dans $\mathbb{C}$

- Si $\Delta \neq 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.
$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\big).$$
- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\big).$$

Résolution dans $\mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les solutions de $(\mathcal{EC})$.
$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\big).$$
- Si $\Delta = 0$, soit λ la solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}, t \mapsto t\mathrm{e}^{\lambda t}\big).$$
- Si $\Delta < 0$, soit $\lambda = a \pm ib$ une solution de $(\mathcal{EC})$.
$$\mathrm{E}_0 = \{t \mapsto (c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt))\mathrm{e}^{at}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big(t \mapsto \cos(bt)\mathrm{e}^{at}, t \mapsto \sin(bt)\mathrm{e}^{at}\big).$$

6. **Solutions de l'équation avec second membre - Principe de superposition**

Soit $z : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est
$$\mathrm{E} = \{y + z, y \text{ solution de } (\mathcal{E})\}.$$

7. **Seconds membres particuliers**

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}e^{\lambda t}$ avec $\mathrm{A} \in \mathbb{K}$.

- Si λ non racine de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}e^{\lambda t}$.
- Si λ racine simple de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto \mathrm{B}te^{\lambda t}$.
- Si λ racine double de $(\mathcal{EC})$, on cherche une solution du type $t \mapsto t^2 e^{\lambda t}$.

☞ **Second membre** $c : t \mapsto \mathrm{A}\cos(\omega t)$ **ou** $c : t \mapsto \mathrm{A}\sin(\omega t)$

On suppose ni $i\omega$ ni $-i\omega$ solutions de $(\mathcal{EC})$.

Alors il existe (λ, μ) tel que $t \mapsto \lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)$ soit solution de $(\mathcal{E})$.

8. **Théorème de Cauchy linéaire**

Soit $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in \mathrm{I}$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy
$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$
admet une unique solution sur I.

6 Séries numériques

6.1 • *Série Géométrique* - $\sum_{n\geq 0} q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

- *Série de Riemann* - $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- *Série exponentielle* - $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout x de $\mathbb{R}$. Sa somme est $\exp(x)$.

6.2 **Divergence grossière**

Si $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge *grossièrement.*

6.3 **Série des différences**

La série $\sum_{n\geqslant n_0} \left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge si, et seulement si, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge.

6.4 **Critère de D'Alembert**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite ne s'annulant pas.

- Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in [\,0\,;\ 1[$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument.
- Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \,]\,1\,;\ +\infty]$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge grossièrement.

6.5 **Absolue convergence**

Si la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

Dans ce cas, on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est **absolument convergente**.

Remarque : lorsqu'elles convergent, les séries de référence du premier point sont absolument convergente.

6.6 **Critères de convergence**

•*Comparaison* - Si $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Domination, négligeabilité* - Si $u_n = \mathcal{O}\left(v_n\right)$ (en particulier si $u_n = o\left(v_n\right)$) et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ est **absolument** convergente alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).

•*Équivalence* - Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ avec v_n de signe constant au voisinage de $+\infty$ alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

6.7 **Théorème spécial des séries alternées (Leibniz)**

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Alors :

- $\sum_{n\geq n_0} (-1)^n u_n$ converge, ainsi que $\sum_{n\geq n_0} (-1)^{n+1} u_n$,
- $\mathrm{R_N} = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{\mathrm{N}+1} u_{\mathrm{N}+1}$ (*i.e.* de son premier terme),
- on a la majoration : $|\mathrm{R_N}| \leq u_{\mathrm{N}+1}$.

6.8 **Formule de Stirling**

$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

6.9 **Constante γ d'Euler - Hors programme mais utile**

$\exists \gamma \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$. En conséquence, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

6.10 **Produit de Cauchy**

① Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries numériques. Le produit de Cauchy de ces séries est la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ où : $\forall n \geq 0, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

② Si les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ convnerge et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

7 Intégrales généralisées

7.1 **Intégrales de Riemann**

- Pour $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

7.2 **Intégrales de référence en exp et ln**

- $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ existe si, et seulement si, $\alpha \in \left]0\,;\,+\infty\right[$, et vaut $\frac{1}{\alpha}$ dans ce cas.
- $\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$ existe et vaut -1.

7.3 **Translation de la variable**

- $f : \left]a\,;\,b\right] \to \mathbb{R}$ est intégrable en a^+ si, et seulement si, $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+.
- De même sur $\left[a\,;\,b\right[$: f intégrable en b^- ssi $t \mapsto f(b-t)$ intégrable en 0^+.

7.4 **Intégrales faussement impropres**

Pour $f : \left[a\,;\,b\right[\,(b \neq +\infty) \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{t\to b} f(t)$ existe et est finie, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe. f est prolongeable par continuité en b et on dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est *faussement impropre*.

Idem pour $f : \left]a\,;\,b\right] (a \neq -\infty) \to \mathbb{R}$ continue de limite finie en a.

Une intégrale n'est jamais faussement impropre en $-\infty$ ou $+\infty$

7.5 **Absolue convergence, inégalité triangulaire et intégrabilité**

Si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe, et on a l'*inégalité triangulaire* :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On dit dans ce cas que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* ou que f est *intégrable* sur $\left]a\,;\,b\right[$.

7.6 **Critères de convergence**

Pour $f, g : \left[a\,;\,b\right[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux, éventuellement $b = +\infty$.

Les critères ci-dessous sont valables aussi pour $f, g : \left]a\,;\,b\right] \to \mathbb{R}$ en permutant les rôles de a et de b.

•*Comparaion - Version signée*

On suppose $\boxed{\mathbf{0 \leq}} f \leq g$. Alors

(i) si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(ii) si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

•*Comparaion - Version intégrabilité*

Si $|f| \leq g$ et g est intégrable sur $\left[a\,;\,b\right[$ alors f est intégrable sur $\left[a\,;\,b\right[$.

•*Domination, négligeabilité* -

Si $f = \mathcal{O}(g)$ en b (en particulier si $f = o(g)$) et g est intégrable sur $\left[a\,;\,b\right[$ alors f est intégrable sur $\left[a\,;\,b\right[$.

•*Équivalence - Version signée*

Mise en garde : « f et g sont **de signe constant** » n'est **pas équivalent à** « f et g sont **de même signe** ».

Si $f \sim g$ en b et **si f et g sont de signe constant** alors les intégrales $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

•*Équivalence - Version intégrabilité*

Si $f \sim g$ en b alors f est intégrable sur $\left[a\,;\,b\right[$ si, et seulement si, g l'est.

7.7 **Changement de variable**

Soit $\varphi : \left]a\,;\,b\right[\to \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) une bijection $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Soit $f : \varphi\big(\left]a\,;\,b\right[\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Alors $\int_{\varphi(a^+)}^{\varphi(b^-)} f(u)\mathrm{d}u$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et égales en cas d'existence. En général, on baptise $u : \left]a\,;\,b\right[\to \mathrm{R}, t \mapsto \varphi(t)$ et on écrit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t)$. Autrement dit, on assimile la nouvelle variable à la fonction φ.

7.8 **Intégration par parties**

Soit $u, v :]\,a\,;\ b[\to \mathbb{R}$ (où éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$) de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{t\to a^+} u(t)v(t)$ **et** $\lim\limits_{t\to b^-} u(t)v(t)$ **existent et sont finies**, alors $\displaystyle\int_a^b u'v$ et $\displaystyle\int_a^b uv'$ sont de même nature.

En cas d'existence, on a : $\displaystyle\int_a^b u'v = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b uv'$.

7.9 **Fonction continue positive d'intégrale nulle**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ **continue et intégrable** sur l'intervalle I. Si $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} |f| = 0$ alors $f = 0$ sur I.

8 Suites de fonctions

I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1 **Convergence simple.**

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ où, pour tout $n \geq n_0$, $f_n : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ converge simplement vers $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$

(ce qui sous-entend l'existence de ces limites).

On écrit alors $f_n \overset{\mathcal{CVS}}{\longrightarrow} f$.

8.2 **Norme uniforme ou infinie.**

Sur l'espace $\mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur l'intervalle I, la fonction

$$||.||_\infty : \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \sup_{x\in \mathrm{I}} |f(x)|$$

est une norme, appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme.

8.3 **Propriété de** $||.||_\infty$

① $\forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $||f||_\infty \geq 0$.

② $\forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $\big(||f||_\infty = 0\big) \Longleftrightarrow f = 0$ (fonction nulle sur I).

③ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$, $||\lambda f||_\infty = |\lambda| \,.\, ||f||_\infty$.

④ $\forall (f, g) \in \mathcal{B}(\mathrm{I}, \mathbb{K})^2$, $||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$.

8.4 **Convergence uniforme.**

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si :

① pour tout $n \geq n_0$, $f_n - f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est bornée,

② $||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On écrit alors $f_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} f$.

8.5 **Stabilité de la continuité par convergence uniforme.**

Si, pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue et si $f_n \overset{\mathcal{CVU}}{\longrightarrow} f$ alors f est continue.

8.6 **Interversion limite-intégrale sur un segment**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions continues sur un segment $[\,a\,;\ b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge uniformément vers une fonction f, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Mise en garde

Le théorème précédent ne s'applique pas si

⋆ l'intervalle n'est pas un segment, en particulier pour des intégrales généralisées ;

⋆ les fonctions ne sont pas continues : « continues par morceaux » est une hypothèse insuffisante.

8.7 **Théorème de dérivabilité, classe** $\mathcal{C}^1$

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

② la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ **converge simplement** sur I vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$,

③ la suite $(f_n')_{n\geq n_0}$ **converge uniformément** sur I vers une fonction $g : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec $f' = g$, autrement dit :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} (f_n').$$

8.8 **Théorème de dérivabilité, classe** $\mathcal{C}^k$

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

② pour tout $i \in [\![\,0\,;\ k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\geq n_0}$ **converge simplement** sur I vers une fonction $g_i : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$,

③ la suite $(f_n^{(k)})_{n\geq n_0}$ **converge uniformément** sur I vers une fonction $g_k : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

Alors la limite g_0 simple de la suite (f_n) est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, avec pour tout $i \in [\![\,1\,;\ k]\!]$, $f^{(i)} = g_i$, autrement dit :

$$\forall i \in [\![\,1\,;\ k]\!]\,, \quad \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim_{n\to+\infty} (f_n^{(i)}).$$

8.9 **Théorème de convergence dominée**

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Si :

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue par morceaux,

② la suite $(f_n)_{n\geq n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f,

③ la fonction f est continue par morceaux,

④ **hypothèse de domination uniforme** – il existe une fonction $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et **intégrable sur I** telle que :

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathrm{I}, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

Alors :

- les fonctions f_n ($\forall n \geq n_0$) et f sont intégrables sur I,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathrm{I}} f_n\right)$ existe et vaut $\int_{\mathrm{I}} f$.

Mise en garde

Pour que le théorème s'applique, il faut que la fonction dominante $\boldsymbol{\varphi}$ **soit indépendante de $\boldsymbol{n}$**, de là l'adjectif « uniforme » : la même fonction φ domine toutes les fonctions f_n.

Remarque

Il n'est pas nécessaire de vérifier au préalable l'intégrabilité des fonctions f_n et de f : c'est une conclusion du théorème.

9 Séries de fonctions

9.1 Convergence simple (CVS)

$\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in \mathrm{I}$,la série numérique $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, la **fonction** $\mathrm{S} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ s'appelle la **somme** de $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$.

9.2 Convergence uniforme (CVU)

$\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément si la suite $(\mathrm{S_N})$ des sommes partielles converge uniformément, i.e. si la suite $(\mathrm{R_N})$ de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle :

$$||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0.$$

En effet,

$$\mathrm{S_N} \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{S} \Longleftrightarrow ||\mathrm{S_N} - \mathrm{S}||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longleftrightarrow ||\mathrm{R_N}||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

9.3 Convergence normale (CVN)

$\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ converge normalement si :

- pour tout $n \geq n_0$, f_n est bornée,
- la série numérique $\sum\limits_{n\geq n_0} ||f_n||_\infty$ converge.

9.4 Relations entre modes de convergence

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme.
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
- La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq n_0}$ vers la fonction nulle ($||f_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).

9.5 Continuité de la somme

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue sur I,

② $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{S}$

alors S est continue sur I.

9.6 Classe $\mathcal{C}^1$

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

② $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}$,

③ $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n' \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{T}$

alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{S}' = \mathrm{T}$, i.e.

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'(x).$$

9.7 Classe $\mathcal{C}^k$

Soit I un intervalle.

Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I,

② pour tout $i \in [\![0\,;\ k-1]\!]$, $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n^{(i)} \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}_i$,

③ $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{CVU}} \mathrm{S}_k$,

alors S_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout $i \in [\![1\,;\ k]\!]$,

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)}(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n^{(i)}(x).$$

9.8 **Du local au global**
Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
- Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a\,;\,b] \subset \mathrm{I}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
- Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur une famille d'intervalle $(\mathrm{I}_a)_{a\in \mathrm{A}}$ inclus dans I telle que $\bigcup\limits_{a\in\mathrm{A}} \mathrm{I}_a = \mathrm{I}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Avertissement Pour autant, la convergence normale ou uniforme sur tout $[a\,;\,b] \subset \mathrm{I}$ n'entraîne pas la CVN ou CVU sur I tout entier. Par exemple pour les $f_n : \mathrm{I} =]-1\,;\,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$,
- $||f_n||_{\infty,\mathrm{I}} = \sup\limits_{-1<x<1} |x^n| = 1$ donc pas de CVN sur I
- pour tout $[-a\,;\,a] \subset \mathrm{I}$, $||f_n||_{\infty,[-a\,;\,a]} = \sup\limits_{-a\leqslant x\leqslant a} |x^n| = a^n$ donc CVN sur $[-a\,;\,a]$

9.9 **Théorème de la double limite**
Soit une série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ de fonctions définies sur un intervalle I.

Si

① $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f_n$ converge uniformément sur I,

② pour tout $n \geqslant n_0$, f_n admet une limite ℓ_n en a borne de I (éventuellement infinie),

alors
- la série $\sum \ell_n$ converge,
- la somme de la série admet une limite en a et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ell_n, \quad i.e \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

9.10 **Intégration terme à terme sur un segment en cas de CV uniforme**
Si

① pour tout $n \geq n_0$, f_n est continue sur **le segment** $[a\,;\,b]$,

② $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément sur **le segment** $[a\,;\,b]$,

alors $$\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

9.11 **Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle**
Soit I un intervalle *quelconque*. On suppose :
Si

① pour tout n, f_n c.p.m. et intégrable sur I,

② $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n \xrightarrow{\mathcal{CVS}} \mathrm{S}$ sur I,

③ S est c.p.m. sur I,

④ la série numérique $\sum\limits_n \left(\int_{\mathrm{I}} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ converge,

alors S est intégrable sur I et
$$\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\int_{\mathrm{I}} f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$

10 Séries Entières

10.1 **Lemme d'Abel**
Soit (a_n) suite de nombres complexes. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

10.2 **Rayon de convergence**
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est :
$$\mathrm{R} = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ / (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} = [0\,;\,+\infty].$$

10.3 **Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence**
Version complexe –
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $|z| < \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument,

(ii) si $|z| > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Version réelle –
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :

(i) si $x \in]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, alors $\sum a_n x^n$ converge absolument,

(ii) si $x < -\mathrm{R}$ ou $x > \mathrm{R}$, alors $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

10.4 **Comparaison asymptotique et rayon de convergence**
$\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ sont deux séries de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geq \mathrm{R}_b$.
- Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

10.5 **Deux propriétés bien pratiques**
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{RC}\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$;

• $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

10.6 **Critère de Jean le Rond D'Alembert pour les séries entières**

On suppose qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, \quad a_n \neq 0$.

Si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0\,;\,+\infty]$, alors $\mathcal{RC}\left(\sum a_n z^n\right) = \dfrac{1}{\ell} \in [0\,;\,+\infty]$.

10.7 **Opérations sur les séries entières**

• Pour tout $\lambda \neq 0$, $\displaystyle\sum_n \lambda a_n z^n$ et $\displaystyle\sum_n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

• En notant $\mathrm{R}_a = \mathcal{RC}\left(\displaystyle\sum_n a_n z^n\right)$ et $\mathrm{R}_b = \mathcal{RC}\left(\displaystyle\sum_n b_n z^n\right)$,

① si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_b$ alors $\mathcal{RC}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n\right) = \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

② si $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$ alors $\mathcal{RC}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n\right) \geqslant min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$.

•**Produit de Cauchy** –

Soit $\forall n \geq 0, c_n \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors pour tout z tel que $|z| < \min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

10.8 **Régularité de la somme d'une série entière**

• $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[a\,;\,b] \subset\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$ de son intervalle ouvert de convergence.

• La somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ est continue sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, resp. $\mathrm{D_O}(0,\mathrm{R})$ lorsqu'on travaille dans $\mathbb{C}$.

• La somme d'une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ est $\mathcal{C}^\infty$ et on peut dériver terme à terme :

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

10.9 **Intégration et primitive**

Soit f somme de la série entière $\displaystyle\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$.

• Pour tout $[a\,;\,b] \subset\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[$, $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_a^b t^n \mathrm{d}t\right)$.

• En particulier, la primitive F de f s'annulant en 0 est définie par :

$$\forall x \in\,]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[,\ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

10.10 **Lien avec le développement de Taylor**

Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

10.11 **Unicité du développement en série entière**

• Si $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur $]-r\,;\,r[$ avec $r > 0$ (c'est-à-dire $\forall x \in\,]-r\,;\,r[, f(x) = g(x)$) alors : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

•*Corollaire pour les fonctions paires, impaires*

f paire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$,

f impaire sur $]-\mathrm{R}\,;\,\mathrm{R}[\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0$.

10.12 **Développements en série entière de référence**

☞ *Variable réelle*

• $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$

• $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ et $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

• $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ et $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

• $\forall x \in\,]-1\,;\,1[, \qquad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

• $\forall x \in\,]-1\,;\,1[, \qquad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ et $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

• $\forall x \in\,]-1\,;\,1[, \qquad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in\,]-1\,;\,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

☞ *Variable complexe*

- $\forall z \in \mathcal{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}, \qquad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}.$

10.13 **Propriétés de l'exponentielle complexe**

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$
- $\forall z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$$

11 Espaces vectoriels normés

11.1 Une **norme** $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel E vérifie les axiomes :
(i) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) \geq 0$ (positivité) ;
(ii) $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$ (séparation) ;
(iii) $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \ \mathrm{N}(x)$ (homogénéité) ;
(iv) $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.
Le couple (E, N) est un *espace vectoriel normé* (evn). On dit aussi que E est muni de la norme N. On note souvent $||.||$ pour N.

11.2 La **distance associée à la norme** $||.||$ est définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad d(x, y) = ||x - y||.$$
La **distance d'un vecteur à une partie** $\mathrm{P} \subset \mathrm{E}$ est, si elle existe, $d(x, \mathrm{P}) = \inf\limits_{y \in \mathrm{P}} d(x, y) = \inf\limits_{y \in \mathrm{P}} ||x - y||$.

11.3 *Propriétés de la norme.* Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ un evn. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$.
(i) $||0_{\mathrm{E}}|| = 0$,
(ii) $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x - y||$ et $\big| ||x|| - ||y|| \big| \leq ||x + y||$,
(iii) $\big| ||x - y|| - ||y - z|| \big| \leq ||x - z||$ i.e $\big| d(x, y) - d(y, z) \big| \leq d(x, z)$.

11.4 **Norme induite sur un sous-espace** Soit (E, N) un evn et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\mathrm{N}|_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ est une norme, dite *norme induite* par N sur F, et $(\mathrm{F}, \mathrm{N}|_{\mathrm{F}})$ est un evn.

11.5 **Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**
Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,
(i) $||x||_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ *(norme de Manhattan)*
(ii) $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *(norme de la géométrie euclidienne canonique)*
(iii) $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *(loi du plus fort)*
Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) $||\mathrm{M}||_1 = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$ (ii) $||\mathrm{M}||_2 = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\right) = \sqrt{\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2}$
(iii) $||\mathrm{M}||_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$

11.6 **Normes sur un espace produit, sur un espace somme**
(i) Soit $(\mathrm{E}_1, ||.||_{\mathrm{E}_1}), \ldots, (\mathrm{E}_p, ||.||_{\mathrm{E}_p})$ p $\mathbb{K}-$evn. Alors
$$\mathrm{N} : \mathrm{E}_1 \times \ldots \mathrm{E}_p \to \mathbb{R}, (u_1, \ldots, u_p) \mapsto \sup_{1 \leq i \leq p} ||u_k||_{\mathrm{E}_k}$$
est une norme sur l'espace produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k$.
(ii) Soit $(\mathrm{E}_1, ||.||_{\mathrm{E}_1}), \ldots, (\mathrm{E}_p, ||.||_{\mathrm{E}_p})$ p sous-espaces supplémentaire de E. Alors
$$\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}, u = u_1 + \cdots + u_p \mapsto \sup_{1 \leq i \leq p} ||u_k||_{\mathrm{E}_k}$$
est une norme sur l'espace E.
(iii) En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors en posant, pour tout x de E, $\mathrm{N}(x) = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on définit une norme sur E. On peut aussi poser $\mathrm{N}_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ou $\mathrm{N}_2(x) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

11.7 **Boules et sphères**
Soit $(\mathrm{E}, ||.||)$ evn, d distance associée à $||.||$. Soit $a \in \mathrm{E}$ et $r \in [\,0\,;\ +\infty[$.
(i) *Boule ouverte de centre a de rayon r* :
$$\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathrm{E} / d(a, x) < r\} = \{x \in \mathrm{E} / \ ||a - x|| < r\}.$$
(ii) *Boule fermée de centre a de rayon r* :
$$\overline{\mathcal{B}(a, r)} = \{x \in \mathrm{E} / d(a, x) \leq r\} = \{x \in \mathrm{E} / \ ||a - x|| \leq r\}.$$
(iii) *Sphère de centre a de rayon r* :
$$\mathcal{S}(a, r) = \{x \in \mathrm{E} / d(a, x) = r\} = \{x \in \mathrm{E} / \ ||a - x|| = r\}.$$
Pour $r = 1$, on parle de **boule unité** et de **sphère unité**.

11.8 **Parties convexes**
(i) Dans E, le segment $[\,x\,;\ y]$ d'extrémité $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{E}$ est : $[\,x\,;\ y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y / \lambda \in [\,0\,;\ 1]\}$.
(ii) $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$ est un convexe ou une partie convexe de E si : $\forall (x, y) \in \mathrm{C}^2, \quad [\,x\,;\ y] \subset \mathrm{C}$.
(iii) Les boules sont des convexes, toute intersection de convexes est convexe.

11.9 **Parties bornées**
$\mathrm{P} \subset \mathrm{E}$ est une partie bornée de E si : $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{P}, ||x|| \leq \mathrm{M}$.

Caractérisation : il y a équivalence entre

(i) P est bornée, (ii) P est incluse dans une boule, (iii) $\exists N \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in P, d(x,y) \leq N$.

Réfutation : P n'est pas bornée si, et seulement si, il existe une suite (u_n) d'éléments de P telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n|| \geq n$.

11.10 **Suites bornées**

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée si $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, autrement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, ||u_n|| \leq M.$$

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

11.11 **Applications bornées**

Soit X un ensemble. $f : X \to E$ est une application bornée si $\{f(x)/x \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, autrement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, ||f(x)|| \leq M.$$

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de E^X.

11.12 **Suites convergentes**

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est convergente si

$$\exists \ell \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad ||u_n - \ell|| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, ℓ est unique et s'appelle la limite de la suite u. Notations usuelles.

Caractérisation : (u_n) converge vers ℓ si, et seulement si, $||u_n - \ell|| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

11.13 *Propriétés :*

(i) Toute suite convergente est bornée.

(ii) Si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont deux suites convergentes d'éléments de E de limite respective ℓ et m, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda u + \mu v = (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, vers $\lambda u + \mu v$.

(iii) Si $u = (u_n)$ est une suite convergente d'éléments de E de limite ℓ et (k_n) une suite de scalaires convergente de limite λ, alors $(k_n u_n)$ converge, vers $\lambda \ell$.

11.14 **Équivalence des normes en dimension finie**

La convergence et la limite d'une suite ne dépendent pas de la norme choisie lorsque E est de dimension finie. Autrement dit, si N et $||.||$ sont deux normes sur E, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} N(u_n - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{n \to +\infty} ||u_n - \ell|| = 0$.

11.15 **Suites coordonnées**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Tout u_n se décompose de manière unique sous la forme : $u_n = u_n^{(1)} e_1 + \cdots + u_n^{(p)} e_p = \sum\limits_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$.

Pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $(u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ est la i-ème suite coordonnée de (u_n) dans la base $\mathcal{B}$.

11.16 **Convergence par coordonnées**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. La suite $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, chacune de ses suites coordonnées dans $\mathcal{B}$ converge.

Dans ce cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} \big(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^{(i)} \big) e_i$.

11.17 **Suites extraites, fonctions extractrices**

Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de u toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où la fonction extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Suite extraite d'une suite convergente : Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

Critère de divergence : Si deux suites extraites ont des limites distinctes...

11.18 **Parties ouvertes, voisinages d'un point**

$x \in \Omega$ est un point *intérieur à* Ω si $\exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.

Une partie $\mathcal{V}$ est un *voisinage de* x si x est intérieur à $\mathcal{V}$.

Ω partie ouverte si : $\forall x \in \Omega, \exists r > 0, \mathcal{B}(x, r) \subset \Omega$.

11.19 **Parties fermées**

La partie F de E est un *fermé* ou une partie fermée si son complémentaire $\complement_E F$ dans E est une partie ouverte de E.

11.20 (i) $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.

(ii) Toute réunion d'ouverts et toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est une partie ouverte.

(iii) Toute réunion d'un nombre fini de fermés et toute intersection de fermés est une partie fermée.

11.21 **Caractérisation séquentielle des fermés**

F est un fermé si, et seulement si, pour **toute** suite convergente $(f_n)_n$ d'éléments de F, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n \in F$... on ne s'échappe pas de F facilement, il est fermé !

11.22 **Équivalence des topologies en dimension finie**

Si E est de dimension finie, toutes les normes de E définissent les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

11.23 **Point adhérent, adhérence, notation**

a est *adhérent* à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents, appelé *l'adhérence* de A :

$$a \in \overline{A} \iff \forall r > 0, \mathcal{B}(a, r) \cap A \neq \emptyset \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, ||x - a|| < \varepsilon.$$

Caractérisation séquentielle des points adhérents : a est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers A.

Corollaire : $\overline{A}$ est fermée, $\overline{A} = \bigcap\limits_{F \text{ fermé } \supset A} F$, A fermé ssi $\overline{A} = A$.

11.24 **Point intérieur, intérieur, notation**
$x \in \Omega$ est un point *intérieur à* Ω si $\exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \Omega$ et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs, appelé *l'intérieur* de A.
Propriété : $\mathring{A}$ est ouvert, $\mathring{A} = \bigcup_{\Omega \text{ ouvert } \subset A} \Omega$, A ouvert ssi $\mathring{A} = A$.

11.25 **Frontière ou bord, notation**
La *frontière* ou la *bord* de A est $\mathrm{F}r(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

12 Rappels d'algèbre linéaire

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1 **Espaces vectoriels de référence**
•$\mathbb{K}^n$ est un espace de **dimension n** admettant $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ pour **base canonique** avec

$$e_1 \overset{\text{déf.}}{=} (1,0,0,\ldots,0),$$
$$e_2 \overset{\text{déf.}}{=} (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\vdots$$
$$e_n \overset{\text{déf.}}{=} (0,0,0,\ldots,1).$$

Pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$.

•$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un espace de **dimension n** admettant $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ pour **base canonique** avec

$$E_1 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad E_2 \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad E_n \overset{\text{déf.}}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Pour tout $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X = x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_nE_n = \sum_{i=1}^{n} x_iE_i$.

•$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace de **dimension np** admettant $\big(E_{i,j}\big)_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ pour **base canonique** où, pour tout (i,j), $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M = \sum_{i,j} m_{i,j}E_{i,j}$.

•$\mathbb{K}_n[X]$ est un espace de **dimension n + 1** admettant $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ pour **base canonique**.

12.2 $f : E \to F$ est une **application linéaire** ssi :
$\forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v).$

12.3 Soit $f : E \to F$ est une application linéaire. Le **noyau** de f est :
$\mathrm{Ker}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \{u \in E / f(u) = 0_F\}.$

12.4 Soit $f : E \to F$ est une application linéaire. L'**image** de f est :
$\mathrm{Im}(f) \overset{\text{déf.}}{=} \{f(u)/u \in E\} = \{v \in F / \exists u \in E \ tq\ f(u) = v\}.$

12.5 **Détermination pratique de l'image**
$f : E \to F$ est une application linéaire avec E de dimension fine n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(\mathcal{B})\big) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$.
¡La famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ n'est pas nécessairement libre !

12.6 **Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

i. M est inversible.
ii. $\mathrm{rg}(M) = n$.
iii. $\det(()\,M) \neq 0$.
iv. Le système $MU = 0$ admet une unique solution ($U = 0$!).
v. $\mathrm{Ker}(M) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$

12.7 **Caractérisation des isomorphismes en dimension finie**
Soit E et F de dimension finie, $f : E \to F$ est une application linéaire.
• Si $\dim E \neq \dim F$ alors f n'est pas un isomorphisme.
• Si $\dim E = \dim F$ alors il y a équivalence entre :

i. f est un isomorphisme.
ii. f est injective.
iii. f est surjective.
iv. $\mathrm{rg}(f) = \dim F$ $(= \dim E)$.
v. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.
vi. $\det(()\,f) \overset{\text{déf.}}{=} \det(()\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) \neq 0$.

12.8 Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n. La **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, est

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{\text{déf.}}{=} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}),$$

autrement dit : les colonnes de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ sont formés des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans la bases $\mathcal{B}$.

12.9 **Passage réciproque**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ est inversible, et

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$$

12.10 **Formules de changement de bases**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

- Soit x un vecteur de E. Alors :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$
- Soit f un endomorphisme de E. Alors :
$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{P}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

12.11 **Similitude**

Deux matrices carrées A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

On a alors $\mathrm{A} = \left(\mathrm{P}^{-1}\right)^{-1}\mathrm{BP}^{-1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{B}^n = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}$.

12.12 **Trace**

- La trace de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
- $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \mathrm{A} \mapsto \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$ est une forme linéaire.
- $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$
- $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$

12.13 **Somme directe de deux sous-espaces.**

Soit F et G deux sous-espaces de E. Il y a équivalence entre :

i. la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe (notée $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), *ii.* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$,

iii. $\forall u \in \mathrm{F} + \mathrm{G}, \exists!(f, g) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad u = f + g$,

et en dimension finie :

iv. $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$,

v. en concaténant une base de F et une base de G on obtient une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$.

13 Polynômes

13.1 **Degré**

① $\deg(0) = -\infty$

② $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{P}), \deg(\mathrm{Q}))$ avec égalité si (mais pas seulement) $\deg(\mathrm{P}) \neq \deg(\mathrm{Q})$.

③ $\deg(\mathrm{PQ}) \leqslant \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$

④ $\deg(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})\deg(\mathrm{Q})$ si Q non nul

13.2 **Formule de Leibniz**

$$(\mathrm{PQ})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{P}^{(k)}\mathrm{Q}^{(n-k)}$$

13.3 **Division euclidienne**

Soit A un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
Alors il existe deux polynômes Q et R tels que

$$\mathrm{A} = \mathrm{BQ} + \mathrm{R} \quad \text{avec} \;\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B}).$$

13.4 **Formule de Taylor et translation**

① $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(\mathrm{X} - a)^k$

② $\mathrm{P}(\mathrm{X} + a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}\mathrm{X}^k$

13.5 **Racines et multiplicité**

Il y a équivalence entre

① a est une racine d'ordre de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$ de P

② $(\mathrm{X} - a)^\mu$ divise P et $(\mathrm{X} - a)^{\mu+1}$ ne divise pas P

③ $\begin{cases} \mathrm{P}(a) = 0 \\ \mathrm{P}'(a) = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{P}^{(\mu-1)}(a) = 0 \end{cases}$ et $\mathrm{P}^{(\mu)}(a) \neq 0$

13.6 **Théorème de D'Alembert-Gauβ et conséquence**

① Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ possède (au moins) une racine complexe.

② Tout polynôme de degré au plus n admettant strictement plus de n racines comptées avec leur multiplicité est nul.

13.7 **Polynômes réels et racines complexes**

① Si P est un polynôme à coefficients réels admettant une racine complexe α de multiplicité μ, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P, de même multiplicité μ.

② Les racines complexes d'un polynôme réel sont deux à deux conjuguées.

13.8 **Polynômes irréductibles**

① Le polynôme P de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est dit irréductible s'il est non constant et si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes de la forme $\lambda\mathrm{P}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

② Autrement dit, P non constant est irréductible si, et seulement si, $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ entraîne A ou B est constant.

13.9 Caractérisation des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$

① Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\big(X - \frac{-b}{a}\big) \quad \text{avec } a \neq 0.$$

② Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré

$$P = aX + b = a\big(X - \frac{-b}{a}\big) \quad \text{avec } a \neq 0$$

et les polynômes du second degré sans racines réelles

$$P = aX^2 + bX + c \quad \text{avec } b^2 - 4ac < 0.$$

13.10 Liens coefficients-racines

① Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ un polynôme **scindé** de $\mathbb{K}[X]$ c'est-à-dire pouvant se décomposer en $P = a_d \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\mu_i}$.

Alors $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mu_i = -\frac{a_{d-1}}{a_d}$ et $\prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{\mu_i} = (-1)^d \frac{a_0}{a_d}$.

② En particulier, les racines α et β du trinôme $X^2 - sX + p$ vérifient
$\alpha + \beta = s$ et $\alpha\beta = p$.

13.11 Décomposition des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

① Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k}$$

où les α_k sont les racines de P, de multiplicité respective μ_k,

λ est le coefficient dominant de P et $\sum_{k=1}^{r} \mu_k = \deg(P)$.

② Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut se factoriser

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\mu_k} \times \prod_{j=1}^{s} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{\nu_k}$$

où les α_k sont les racines de P, de multiplicité respective μ_k, $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ pour tout j de $[\![1\,;\, s]\!]$, λ est le coefficient dominant de P et $\sum_{k=1}^{r} \mu_k + 2\sum_{j=1}^{s} \mu_j = \deg(P)$.

13.12 Cas de $X^n - 1$

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \big(X - e^{2ik\pi/n}\big) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$$

où $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

13.13 Décomposition en éléments simples

① On appelle fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ le quotient de P par Q, défini en tout point où Q ne s'annule pas.

② Les pôles de F sont les racines du polynôme Q.

③ On dit que le pôle a de F est simple lorsque a est une racine simple de Q.

④ Si Q est scindé à racines simples (donc les pôles de F sont tous simples) s'écrit $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$, alors il existe un polynôme E et n scalaires $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ tels que

$$F = E + \frac{b_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{b_n}{X - a_n}$$

où E s'obtient par division euclidienne de P par Q et chaque b_k s'appelle le résidu de a_k.

⑤ Dans le cas précédent, on peut montrer que $b_k = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$.

⑥ On rencontre fréquemment

$$\frac{1}{X(X+a)} = \frac{1/a}{X} - \frac{1/a}{X+a}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^2 - a^2} = \frac{1/(2a)}{X-a} - \frac{1/(2a)}{X+a}$$

et notamment les cas $a = \pm 1$.

13.14 Base de Lagrange, définition

Soit $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

On appelle *base de Lagrange* associée aux points $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de polynômes définie par

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], \quad L_i = \frac{\prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} (X - a_k)}{\prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} (a_i - a_k)} = \prod_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$$

13.15 **Base de Lagrange, propriétés**

① $\forall i \in [\![0\,;\ n]\!],\quad \deg(\mathrm{L}_i) = n.$

② $\forall (i,j) \in [\![0\,;\ n]\!]^2,\quad \mathrm{L}_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

③ $(\mathrm{L}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.

④ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Alors $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i$

⑤ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i = 1$, polynôme constant.

13.16 **Interpolation de Lagrange**

Soit $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $n+1$ points deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $(b_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ $n+1$ points de $\mathbb{K}$.
Il existe un unique polynôme L de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall i \in [\![0\,;\ n]\!],\quad \mathrm{L}(a_i) = b_i,$$

c'est

$$\mathrm{L} = \sum_{i=0}^{n} b_i \mathrm{L}_i.$$

14 Déterminants

14.1 **Définition**

$\det(:) \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est l'unique application φ vérifiant :

- φ linéaire par rapport à chaque colonne (donc n-linéaire)
- φ antisymétrique par rapport aux colonnes
- $\varphi(\mathrm{I}_n) = 1$.

Pour $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(()\,\mathrm{A})$ appelé déterminant de A se note

$$\det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

14.2 **Règles de calcul**

Soit $\mathrm{A} = \big(\mathrm{C}_1 | \dots | \mathrm{C}_n\big) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

① Si une colonne de A est nulle, alors $\det(()\,\mathrm{A}) = 0$.

② La permutation de deux colonnes de A change $\det(()\,\mathrm{A})$ en $-\det(()\,\mathrm{A})$.

③ Si deux colonnes de A sont colinéaires, alors $\det(()\,\mathrm{A}) = 0$.

④ Si les colonnes de A forment une famille liée, alors $\det(()\,\mathrm{A}) = 0$.

⑤ La substitution $\mathrm{C}_j + \lambda \mathrm{C}_k \to \mathrm{C}_j$ (où $j \neq k$) ne modifie pas $\det(()\,\mathrm{A})$.

⑥ L'ajout à C_j d'une combinaison linéaire des autres colonnes de A ne modifie pas $\det(()\,\mathrm{A})$.

⑦ La substitution $\lambda \mathrm{C}_j \to \mathrm{C}_j$ multiplie $\det(()\,\mathrm{A})$ par λ.

⑧ $\det(()\,\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \det(()\,\mathrm{A})$, donc les **règles** précédentes sont **valables** en travaillant **sur les lignes comme sur les colonnes**.

⑨ La multiplication de A par λ multiplie $\det(()\,\mathrm{A})$ par λ^n.

14.3 **Mineurs, cofacteurs et comatrice**

- Mineur d'indice (i,j), $\mathrm{M}_{i,j}$ déterminant obtenu en supprimant i-ème et j-ème colonne ;
- Cofacteur de $a_{i,j}$: $\mathrm{A}_{i,j} \overset{\text{déf.}}{=} (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{i,j}$.
- Comatrice de A : $com(\mathrm{A}) \overset{\text{déf.}}{=} \big(\mathrm{A}_{i,j}\big)_{1\leq i,j\leq n}$.

Développement suivant la j-ème colonne, la i-ème ligne

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\mathrm{A}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j}\mathrm{M}_{k,j},$$
$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\mathrm{A}_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k}\mathrm{M}_{i,k}.$$

14.4 **Matrices triangulaires, diagonales**

Leur déterminant est le produit de leurs coefficients diagonaux.

14.5 **Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs**

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{A}_n \end{pmatrix}$, alors $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}_1)\dots\det(\mathrm{A}_n)$

(où $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont n matrices carrées).

14.6 **Propriétés théoriques**

① $\det\big(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\big) = \det(\mathrm{A})$,

② $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$,

③ $\mathrm{A} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\mathrm{A}) \neq 0$, et dans ce cas : $\det\big(\mathrm{A}^{-1}\big) = \dfrac{1}{\det(\mathrm{A})}$.

④ Invariance par similitude :

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \det\big(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\big) = \det(\mathrm{A}).$$

⑤ Conséquence : pour $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ (avec $\dim \mathrm{E} < +\infty$), $\det(f) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E.

⑥ $f \in \mathcal{GL}(\mathrm{E}) \iff \det(f) \neq 0$.

14.7 **Déterminant tridiagonal -** *(À savoir refaire)*

$$\mathrm{D}_n(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}_n \quad (\text{où } n \geq 3),$$

$$\text{avec } \mathrm{D}_1(a,b,c) = |a|_1,\ \mathrm{D}_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix}_2$$

se calcule en développant par rapport à première colonne, puis la première ligne : on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux :

$$\mathrm{D}_n(a,b,c) = a\mathrm{D}_{n-1}(a,b,c) - bc\mathrm{D}_{n-2}(a,b,c).$$

14.8 **Déterminant de Vandermonde -**

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\mathrm{V}(a_1, ..., a_n) \overset{\text{déf.}}{=} \det\left((a_i^{j-1})\right) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

$\mathrm{V}(a_1) = 1$, et,

$$\forall n \geq 2,\ \mathrm{V}(a_1, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (a_j - a_i).$$

15 Réduction des endomorphismes, diagonalisation des matrices carrées

15.1 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$\exists u \in \mathrm{E}, u \neq 0 \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• $u \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ ssi

$$u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(u) = \lambda u.$$

• Le **spectre** de f noté $\mathrm{Sp}(f)$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ de f est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \{u \in \mathrm{E} / f(u) = \lambda u\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}).$$

15.2 • $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\exists \mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathrm{U} \neq 0 \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de la matrice** (parfois appelée colonne propre) $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ssi

$$\mathrm{U} \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}.$$

• Le **spectre** de M noté $\mathrm{Sp}(\mathrm{M})$ est l'ensemble des ses valeurs propres.

• Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ de M est

$$\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \{\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / \mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

15.3 Le **polynôme caractéristique de l'endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est le polynôme $\chi_f(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}id_{\mathrm{E}} - f)$.

• On a, pour E de dimension n, $\chi_f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(f)\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$.

15.4 Le **polynôme caractéristique de la matrice** $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$.

• On a, pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(\mathrm{M})$.

15.5 **Cas particulier des matrices triangulaires**

• Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) $\mathrm{T} = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{t_{i,i}/i \in [\![1\,;\ n]\!]\}.$$

• Son polynôme caractéristique est alors $\chi_{\mathrm{T}}(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - t_{i,i})$.

15.6 **Caractérisation des valeurs propres** d'un endomorphisme

Il y a équivalence entre :

• $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$

• $\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) \neq \{0\}$

• $\mathrm{rg}(f - \lambda id_{\mathrm{E}}) < \dim(\mathrm{E})$

• $\chi_f(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de f).

15.7 **Caractérisation des valeurs propres** d'une matrice d'ordre n

Il y a équivalence entre :

• $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$

• $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible

• $\mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$

• $\chi_{\mathrm{M}}(\lambda) = 0$ (λ est une racine du polynôme caractéristique de M).

15.8 **Multiplicité d'une valeur propre**

On appelle multiplicité de la valeur propre λ notée $\mu(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique.

15.9 **Polynômes et éléments propres**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $(\lambda, u) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Alors :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^k(u) = \lambda^k u$,

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\varphi)(u) = \mathrm{P}(\lambda) u$. [Remarque : $\mathrm{P}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

② Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mathrm{U}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $\mathrm{MU} = \lambda \mathrm{U}$. Alors :

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^k \mathrm{U} = \lambda^k \mathrm{U}$,

(ii) $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})\mathrm{U} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{U}$. [Remarque : $\mathrm{P}(\mathrm{M}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathbb{K}$]

15.10 **Polynômes annulateurs et valeurs propres**

① Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors les valeurs propres de φ sont parmi les racines de P.

② Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme annulateur de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les valeurs propres de M sont parmi les racines de P.

15.11 **Théorème de Cayley-Hamilton**

① Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors $\chi_\varphi(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}$.

② Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0_n$.

15.12 **À propos des sous-espace propre** version endomorphisme

• Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $\dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(f - \lambda id_{\mathrm{E}})$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(f, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

15.13 **À propos des sous-espace propre** version matrice

• Des SEP associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $\dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) = \dim \mathrm{E} - \mathrm{rg}(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n)$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})$, alors $1 \leq \dim \mathrm{SEP}(\mathrm{M}, \lambda) \leq \mu(\lambda)$.

15.14 **Condition suffisante de diagonalisabilité**

• Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Soit f un endomorphisme de E. Si $\mathrm{C}ard(\mathrm{Sp}(\mathrm{F})) = dim(\mathrm{E})$, alors f est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.

• Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathrm{C}ard(\mathrm{Sp}(\mathrm{M})) = n$, alors M est diagonalisable et ses n sous-espaces propres sont de dimension 1.

• Si χ_f (resp. χ_{M}) est scindé à racines simples, alors f (resp. M) est diagonalisable.

15.15 **Théorème général de diagonalisabilité** version endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit f un endomorphisme de E. Il y a équivalence entre :

• f est diagonalisable ;

• il existe une base de E formée de vecteurs propres de f ;

• les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans E ;

• $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = \dim(\mathrm{E})$;

• χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;

• il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de f.

15.16 **Théorème général de diagonalisabilité** version matrice

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il y a équivalence entre :

• M est diagonalisable ;

• il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de colonnes propres de M ;

• les sous-espaces propres de M sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;

• $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M})} \dim(\mathrm{E}_\lambda) = n$;

• χ_{M} est scindé sur $\mathbb{K}$ et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{M}), \dim \mathrm{E}_\lambda = \mu(\lambda)$;

• il existe un polynôme scindé à racines simple annulateur de M.

15.17 La matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire.

• M est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

• Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

15.18 Un endomorphisme φ de E est dit **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentant φ est triangulaire.

- φ est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
- Dans un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (de dimension finie) tout endomorphisme est trigonalisable.

15.19 **Cas des matrices symétriques réelles**
Toute matrice symétrique réelle S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles et χ_S est scindé sur $\mathbb{R}$.

16 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, muni d'un produit scalaire à partir de 3.

16.1 **Produit scalaire & norme euclidienne associée**
Un *produit scalaire* $\langle .,. \rangle : E\times E \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifiant :

(a) φ est *linéaire à gauche* :
$\forall (u,v,w) \in \mathbb{E}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda u + v, w) = \lambda\varphi(u,w) + \varphi(v,w)$;

(b) φ est *symétrique* :
$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2,\ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$;
1. et 2. prouvent que φ est *bilinéaire symétrique* (opératoirement parlant $\langle .,. \rangle$ est *distributif et commutatif*).

(c) φ est *positive* :
$\forall u \in \mathbb{E},\ \varphi(u,u) \geq 0$;

(d) φ est *définie* :
$\forall u \in \mathbb{E},\ (\varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow u = 0)$;
3. et 4. prouvent que φ est *définie positive.*

La *norme euclidienne* associée est
$$||.|| : E \to \mathbb{R}, u \mapsto \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

16.2 **Produits scalaires usuels**

☞ Canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$

de norme associée : $||(x_1,\ldots,x_n)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X,Y\rangle = X^T.Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

(noter que $X^TY \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$)

de norme associée : $||X|| = \sqrt{X^T.X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(A^T.B\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}$

de norme associée : $||A|| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^T.B)} = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2}.$

Pour ce produit scalaire, la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale.

☞ Sur $\mathcal{C}([\,a\,;\ b\,],\mathbb{R})$: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire.

16.3 **Identités remarquables**... *le p.s. est commutatif et distributif*
$\forall (u,v) \in E^2, ||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2$;
$\forall (u,v) \in E^2, \langle u,v\rangle = \frac{1}{2}\left(||u+v||^2 - ||u||^2 - ||v||^2\right).$
$\forall (u,v) \in E^2, \langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right).$

16.4 **Théorème de Pythagore**

- $u \perp v \Longleftrightarrow ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$
- Si la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthogonale, alors $\left|\left|\sum_{i=1}^n u_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^n ||u_i||^2.$

16.5 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
$$\forall (u,v) \in E^2,\ |\langle u,v\rangle| \leq ||u||\,||v||,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.
On utilise souvent cette inégalité en l'élevant au carré (évitant les $|.|$ et $\sqrt{.}$) :
$$\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u,v\rangle^2 \leq ||u||^2\,||v||^2.$$

16.6 **Inégalité triangulaire**
$$\forall (u,v) \in E^2,\ ||u+v|| \leq ||u|| + ||v||,$$
avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires *de même sens,* c'est-à-dire :
$$\exists k \in [\,0\,;\ +\infty[\,, v = ku \text{ ou } u = kv.$$

16.7 **Vecteurs, familles, sous-espaces ortogonaux**
① Par définition : $u \perp v \Longleftrightarrow \langle u,v\rangle = 0.$
② La famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

③ La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est orthonormale si ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux.
Autrement dit :

$$(u_1, \ldots, u_p) \text{ est orthonormale ssi } \forall (i,j) \in [\![1\,;\ n]\!]^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

④ Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si

$$\forall (u,v) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, u \perp v = 0.$$

16.8 **Orthogonal d'un sous-espace**
Soit F un sous-espace de E. On appelle *orthogonal de F*, noté $\mathrm{F}^\perp$, l'ensemble

$$\mathrm{F}^\perp \overset{\text{déf.}}{=} \left\{ u \in \mathrm{E} | \forall v \in \mathrm{F}, u \perp v \right\}.$$

$\mathrm{F}^\perp$ est toujours un sous-espace vectoriel de E.

16.9 **Liberté des familles orthogonales et orthonormales**
① Toute famille orthogonale de vecteurs *tous non nuls* est libre.
② Toute famille orthonormale de vecteurs est libre.

16.10 **Caractérisation de l'orthogonalité de sous-espaces**
Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_q)$. Alors

$$\mathrm{F} \perp \mathrm{G} \text{ si, et seulement si, } \forall (i,j) \in [\![1\,;\ p]\!] \times [\![1\,;\ q]\!], \quad u_i \perp v_j.$$

16.11 **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille libre de vecteurs. On pose :
① $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$;

② successivement pour tout $k \in [\![2\,;\ p]\!]$, $\quad e_k = \dfrac{u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i}{\left|\left| u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i \right|\right|}$.

Alors
① la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormale,
② $\forall k \in [\![1\,;\ p]\!], \quad \mathrm{Vect}\big(u_1, \ldots, u_k\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1, \ldots, e_k\big)$.

16.12 **Espace euclidien**
On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel de *dimension finie* muni d'un produit scalaire.

16.13 **Existence et intérêt des bases orthonormales**
① Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales.
② Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E. Alors :
•*coordonnées et norme d'un vecteur :*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \text{ et } ||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

•*produit scalaire de deux vecteurs*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle,$$

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y} \text{ et } ||x|| = \sqrt{\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X}} \text{ si } \mathrm{X} = \mathcal{M}_\mathcal{B}(x) \text{ et } \mathrm{Y} = \mathcal{M}_\mathcal{B}(y).$$

•*matrice d'un endomorphisme*
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M} = (m_{i,j}) = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$. Alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\ n]\!], \qquad m_{i,j} = \langle f(e_j, e_i \rangle.$$

16.14 **LE supplémentaire orthogonal d'un sous-espace**
Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien, $\mathrm{F}^\perp$, appelé *supplémentaire orthogonal de F*, est caractérisé par les propriétés *équivalentes* suivantes :
① $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ et $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^\perp$;
② $\mathrm{F} \perp \mathrm{F}^\perp$ et $\dim\left(\mathrm{F}^\perp\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F})$;
③ pour tout sous-espace G de E, on a : $\mathrm{G} \perp \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{G} \subset \mathrm{F}^\perp$;
④ en concaténant une base orthogonale de F et une base orthogonale de $\mathrm{F}^\perp$, j'obtiens une base orthogonale de E.

16.15 **Les supplémentaires orthogonaux vont par paire**
$\left(\mathrm{F}^\perp\right)^\perp = \mathrm{F}$, ou encore : $\left(\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp\right) \Longleftrightarrow \left(\mathrm{F} = \mathrm{G}^\perp\right)$.

16.16 **Projection orthogonale**
Soit F sous-espace vectoriel de l'espace euclidien E. La projection orthogonale sur F notée p_F est la projection sur F dans la direction de (ou parallèlement à) $\mathrm{F}^\perp$.
En conséquence des propriétés générales des projecteurs :

$$\mathrm{Im}(p_\mathrm{F}) = \mathrm{SEP}(p_\mathrm{F}, 1) = \mathrm{F} \text{ et } \mathrm{Ker}(p_\mathrm{F}) = \mathrm{SEP}(p_\mathrm{F}, 0) = \mathrm{F}^\perp.$$

16.17 **Calcul du projeté orthogonal d'un vecteur**
Soit p_F la projection orthogonale sur $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. On a :
① $v = p_\mathrm{F}(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} v \in \mathrm{F} \\ v - u \in \mathrm{F}^\perp \end{cases}$

② pour toute base orthonormale $(e_1, \ldots, e_m)$ de F, $p_\mathrm{F}(u) = \sum_{i=1}^{m} \langle u, e_i \rangle e_i$.

16.18 **Inégalité de Bessel**

$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad ||p_\mathrm{F}(u)|| \leq ||u||.$$

16.19 **Meilleure approximation en norme**
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors $\min_{v \in \mathrm{F}} ||u - v||$ existe et est atteint uniquement pour $v = p_\mathrm{F}(u)$:

$$\forall v \in \mathrm{F}, \qquad \Big(v = p_\mathrm{F}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad ||u - v|| = \min_{w \in \mathrm{F}} ||u - w|| \Big)$$

16.20 **Distance d'un vecteur à un sous-espace**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E. Alors la distance de u à F, notée $d(u,\mathrm{F})$ est définie par

$$d(u,\mathrm{F}) = \min_{v\in \mathrm{F}} ||u-v|| = ||u - p_{\mathrm{F}}(u)||.$$

17 Probabilités discrètes

17.1 Dénombrabilité

Un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. Un ensemble est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

17.2 Exemples

(i) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, Toute partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ est au plus dénombrable.

(ii) Tout ensemble pouvant s'écrire $\{x_i / i\in \mathrm{I}\}$ avec $\mathrm{I}\subset\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.

17.3 Produit cartésien et réunion d'ensembles dénombrables

Le produit cartésien et la réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

17.4 Tribu, espace probabilisable

On appelle *tribu* $\mathcal{T}$ sur Ω tout sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

① $\emptyset\in\mathcal{T}$;

② Si $\mathrm{A}\in\mathcal{T}$ alors $\overline{\mathrm{A}} = \Omega\setminus \mathrm{A}\in\mathcal{T}$;

③ pour toute suite dénombrable $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

Tout couple $(\Omega,\mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω est un *espace probabilisable*, tout élément de $\mathcal{T}$ est un événement.

17.5 Propriétés d'une tribu

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

(i) $\Omega\in\mathcal{T}$;

(ii) pour toute suite dénombrable $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n$ appartient à $\mathcal{T}$.

(iii) $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{T}^2 \Rightarrow \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}} = \mathrm{A}\setminus\mathrm{B}\in\mathcal{T}$.

17.6 Vocabulaire de la modélisation

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisé.

(a) Ω : univers des possibles, ensemble des résultats possibles de l'expérience ;
(b) $\mathrm{A}\in\mathcal{T}$: événement ;
(c) Réalisation d'un événement A : l'événement A est *réalisé* si le résultat ω de l'expérience appartient à A ;
(d) $\overline{\mathrm{A}} = \Omega\setminus\mathrm{A}$: contraire de A ;
(e) Ω : événement certain ;
(f) $\emptyset$: événement impossible ;
(g) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$: et, « A et B se réalisent simultanément » ;
(h) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$: ou inclusif, « A ou/et B se réalise » ;
(i) $\bigcup_{n\geqslant n_0}\mathrm{A}_n$: « l'un (au moins) des événements A_n se réalise », ou encore « il existe $n\geqslant n_0$ tel que A_n se réalise » ;
(j) $\bigcap_{n\geqslant n_0}\mathrm{A}_n$: « tous les événements A_n se réalisent » , ou encore « pour tout $n\geqslant n_0$, A_n se réalise » ;
(k) $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B} = \mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$: « A se réalise mais pas B » ;
(l) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\emptyset$: A et B sont incompatibles ;
(m) $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$: « A entraîne B », i.e. la réalisation de A entraîne celle de B ;
(n) si $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 1$ alors A est **presque-sûr** (ou presque-certain) ;
(o) si $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0$ alors A est **négligeable** (ou presque-impossible).

17.7 Probabilité, espace probabilisé

Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable. Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{T}\mapsto [0\,;\,1]$ telle que :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*axiome de certitude*) ;

(ii) Pour toute suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements *deux à deux* incompatibles, la série $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge et :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \qquad (\sigma-\textit{additivité})$$

.

Le triplet $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ est un *espace probabilisé*.

17.8 Propriété d'une probabilité

Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. A et B désignent des événements ($(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathcal{T}^2$).

(i) Si $\mathrm{A} = \{\omega_i\in\Omega / i\in\mathrm{I}\subset\mathbb{N}\}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \sum_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

(ii) $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1-\mathbb{P}(\mathrm{A})$.

(iii) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\emptyset\Rightarrow\mathbb{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})+\mathbb{P}(\mathrm{B})$.

(iv) $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})+\mathbb{P}(\mathrm{B})-\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.

(v) $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Rightarrow\mathbb{P}(\mathrm{A})\leq\mathbb{P}(\mathrm{B})$ (*croissance de la probabilité*).

(vi) $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Rightarrow\mathbb{P}(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}) = \mathbb{P}(\mathrm{B})-\mathbb{P}(\mathrm{A})$.

17.9 Continuité monotone

Soit $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(i) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante d'événements, i.e. telle que :

$$\forall n\geqslant n_0,\qquad \mathrm{A}_n\subset\mathrm{A}_{n+1}.$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant n_0} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

(i) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite décroissante d'événements, i.e. telle que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \mathrm{A}_{n+1} \subset \mathrm{A}_n.$$

Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geqslant n_0} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

17.10 Sous-additivité

Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'événements telle que $\sum_{n\geq n_0} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$ converge.

Alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant n_0} \mathrm{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)$.

17.11 Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement de probabilité *non nulle*.

Alors : $\mathbb{P}_\mathrm{B} : \mathcal{T} \to [0\,;\,1], \mathrm{A} \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$ est une probabilité, appelée *probabilité conditionnelle sachant B*.

$\mathbb{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A})$ se note aussi $\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$.

17.12 Formule de probabilités composées

Pour toute famille d'événements $(\mathrm{A}_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq k\leq n-1} \mathrm{A}_k\right) > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq k\leq n} \mathrm{A}_k\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}_1)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{A}_2)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2}(\mathrm{A}_3)\ldots\mathbb{P}_{\mathrm{A}_1\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{n-1}}(\mathrm{A}_n).$$

17.13 Système complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un système complet d'événements est une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ telle que :

(i) $\forall i \neq j, \qquad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, $\qquad$ (ii) $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i = \Omega$.

Autrement dit, à chaque réalisation de l'expérience, on est sûr que un et un seul des A_i se réalise.

17.14 Système quasi-complet d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. Un système complet d'événements est une famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ où $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ telle que :

(i) $\forall i \neq j, \qquad \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, $\qquad$ (ii) $\sum_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i) = 1$.

Autrement dit, à chaque réalisation de l'expérience, on est presque-sûr que un et un seul des A_i se réalise.

17.15 Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit un système complet (ou quasi-complet) d'événements $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alors, pour tout événement $\mathrm{B} \in \mathcal{T}$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_n)$ converge et

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})$$

en convenant que $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n)\mathbb{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) = 0$.

17.16 Indépendance d'événements

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(i) Les événements A et B de $\mathcal{T}$ sont *indépendants* si $\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B})$.

(ii) Les n événements $(\mathrm{A}_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de $\mathcal{T}$ sont *deux à deux indépendants* si pour tous $i \neq j$ de $[\![1\,;\,n]\!]$, A_i et A_j sont indépendants.

(ii) Les n événements $(\mathrm{A}_k)_{k\in[\![1\,;\,n]\!]}$ de $\mathcal{T}$ sont *mutuellement indépendants* si, pour toute partie $\mathrm{I} \subset [\![1\,;\,n]\!]$, $\qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathbb{P}(\mathrm{A}_i)$.

Á défaut de précision dans l'énoncé, l'indépendance d'une famille est l'indépendance mutuelle.