N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition èn expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de six exercices indépendants, le barème est indicatif (total : 67 points).

Durée : 4 heures.

Exercice 1 *8 points*

1. Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+x)$ ainsi que le rayon de convergence de cette série.
2. Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction
$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)$$
en précisant le rayon de convergence R de la série obtenue.
3. La série obtenue converge-t-elle lorsque $x = \mathrm{R}$? Et lorsque $x = -\mathrm{R}$?

Exercice 2 *13 points*

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$
$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$$
et sous réserve de convergence
$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de S est exactement $[\,0\,;\,+\infty[$.
2. **a**) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathcal{D}$.
   b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathcal{D}$.
   c) La fonction S est-elle continue sur $\mathcal{D}$? Justifier.
3. **a**) Donner une expression explicite à l'aide de fonctions usuelles de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x appartient à $]\,0\,;\,+\infty[$.
   b) Déterminer, en justifiant, la valeur de $\mathrm{S}(0)$.

Exercice 3 *7 points*

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   a) Justifier que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est au plus égal à 1.
   b) Rappeler la définition du rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.
   c) Montrer finalement que $R = 1$.
2. On s'intéresse à la série entière : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n.$

   En remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \leqslant \sqrt{n},$

   déterminer le rayon de convergence de cette série.

Exercice 4 *10 points*

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :
   a) sans calcul ;
   b) en utilisant son rang et sa trace ;
   c) en calculant A^2.
2. Déduire de la question précédente le polynôme caractéristique de A ainsi qu'une expression la plus simple possible de A^n lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(I_3, A)$.
   a) Montrer que $\mathcal{F}$ est stable pour le produit matriciel.
   b) Soit $M = \alpha I_3 + \beta A$ une matrice quelconque de $\mathcal{F}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M et en déduire le spectre de M en fonction de α et β.

Exercice 5 *11 points*

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice de E vérifiant

$$A \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(A) = 0.$$

Soit φ défini sur E par

$$\forall M \in E, \quad \varphi(M) = M + \mathrm{Tr}\,(M)\,A.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $P = X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de φ.
3. Étudier si φ est diagonalisable.
4. Déterminer la trace et le déterminant de φ.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) Rappeler la propriété de division euclidienne des polynômes et déterminer le reste R_k de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme P.
   b) En déduire une expression de l'endomorphisme φ^k comme combinaison linéaire de φ et de l'identité id_E.

Exercice 6 *27 points*

On dispose d'une pièce donnant *Pile* avec une probabilité $p \in]0;1[$ et *Face* avec la probabilité $q = 1 - p$ et on s'intéresse à l'apparition du motif *Pile-Pile-Face* durant une succession infinie de lancers de cette pièce. Si les premiers lancers donnent successivement :

Pile-Face-Pile-Pile-Face-Face-Pile-Pile-Pile-Face-Pile-Face-...

on dit que le motif *Pile-Pile-Face* est apparu pour la première fois au rang 5 et pour la deuxième fois au rang 10.

Dans les questions 3 et 4, on détermine de deux façons la probabilité de l'événement J défini par

J : « le motif *Pile-Pile-Face* n'apparaît jamais »

Dans la question 5, Monsieur M abuse [1] Monsieur B.

Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes entre elles.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'événement F_n par

F_n : « *Face* apparaît au rang n »,

et on admet que les événements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \geqslant 3$, on définit l'événement A_n par

A_n : « le motif *Pile-Pile-Face* apparaît au rang n ».

Pour tout couple d'événements (A, B) tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on notera $P_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A|B)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. Rappeler l'énoncé de la propriété de continuité monotone de la probabilité.
2. Pour $n \geqslant 3$, quelle est la probabilité de A_n ?
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit B_n par

$$B_n = \overline{A_3} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_9} \cap \cdots \cap \overline{A_{3n}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{3k}}.$$

   a) Déterminer $\mathbb{P}(B_n)$.
   b) Justifier que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   c) En déduire la probabilité de $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{3k}}$.
   d) Que vaut la probabilité de l'événement J ?

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n l'événement

C_n : « la succession *Pile-Pile-Face* apparaît au moins une fois lors des n premiers lancers ».

   a) Que dire des événements C_1 et C_2 ? Et de la variation de la suite $\left(C_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   b) Justifier que : $\forall n \geq 3, \quad C_{n+1} = C_n \bigcup \left(\overline{C_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right)$.
   c) Montrer que : $\forall n \geq 3, \quad \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) + p^2 q\left(1 - \mathbb{P}(C_{n-2})\right)$.
   d) Montrer que $\left(\mathbb{P}(C_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en précisant sa limite.
   e) En déduire la probabilité de l'événement J.

1. *Abuser* : Profiter avec excès de la bonté de quelqu'un, de sa patience. (*Dictionnaire Larousse*)

5. On démontrerait de façons analogues aux questions 3 et 4, et on l'admettra, qu'il est presque-sûr que le motif Face-Pile-Pile apparaîtra.

Monsieur M, en probabiliste filou, parie un café avec son collègue Monsieur B que le motif *Face-Pile-Pile* apparaîtra avant le motif *Pile-Pile-Face*.
Notons G l'événement défini par

G : « *Pile-Pile-Face* sort sans que *Face-Pile-Pile* ne soit sorti auparavant ».

a) Déterminer les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(\mathrm{G}|\mathrm{F}_1), \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{G}\middle|\overline{\mathrm{F}_1}\cap \mathrm{F}_2\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathrm{G}\middle|\overline{\mathrm{F}_1}\cap\overline{\mathrm{F}_2}\right).$$

b) En déduire, en le justifiant, que : $\mathbb{P}(\mathrm{G}) = p^2$.
c) En déduire les probabilités p_{M} et p_{B} de gagner de messieurs M et B respectivement.
d) Vérifier que, si la pièce est juste, M. M à trois fois plus de chance de gagner que M. B.
e) On donne $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ à 10^{-3} près.
À quelle condition sur p le pari tourne-t-il à l'avantage de M. B ? Un commentaire ?

FIN