Solution (**Ex.1 –** *8 points*)

1. $R = 1$, $\forall x \in]-1\,;\,1[,\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.

2. Par 1., $\forall x \in]-1/2\,;\,1/2[,\quad -\ln(1-2x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$, et par somme de deux séries entières de rayons distincts,

$$\boxed{\forall x \in]-1/2\,;\,1/2[,\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}+2^n}{n} x^n, \text{ de rayon } \frac{1}{2} = \min(1/2, 1)}$$

3. • Pour $x = 1/2$, comme $\frac{(-1)^{n+1}+2^n}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{n} \times \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, la série diverge.

• Pour $x = -1/2$, le terme général est $\frac{-1}{n2^n} + \frac{(-1)^n}{n}$, somme de termes généraux de séries convergentes, le premier car négligeable devant le terme géométrique $(1/2)^n$ et le second par application directe du théorème des séries alternées. Donc la série converge.

Solution (**Ex.2 –** *13 points*)

1. • Si $x < 0$, $\frac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et la série diverge grossièrement.

• Si $x \geqslant 0$, la suite $u = \left(\frac{e^{-nx}}{n}\right)$ est une suite strictement positive, décroissante car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ne^{-x}}{n+1} < 1$, de limite nulle donc par le théorème spécial des séries alternées, la série converge.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition } \mathcal{D} \text{ de S est } [\,0\,;\,+\infty[.}$$

2. a) $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ car $|f_n|$ est majorée par cette valeur qu'elle atteint en 0, donc par divergence de la série harmonique

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathcal{D}.}$$

b) Soit pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Soit $n \geqslant 1$. Par le théorème spécial des séries alternées,

$\forall x \in \mathcal{D},\quad |R_n(x)| \leqslant \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Donc R_n est une fonction bornée, et $\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$. Par encadrement $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } \mathcal{D}.}$$

c) Comme sur $\mathcal{D}$ pour tout $n \geqslant 1$ f_n est continue, et la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S,

$$\boxed{\text{la fonction S est-elle continue sur } \mathcal{D}}$$

3. a) Pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty[$, $-e^{-x} \in]-1\,;\,1[$ donc en exploitant le développement en série de $\ln(1-x)$

$$\boxed{\forall x > 0,\quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e^{-x})^n}{n} = -\ln(1+e^{-x})}$$

b) S étant continue sur $\mathcal{D} = [\,0\,;\,+\infty[$, $S(0) = \lim_{x\to0} S(x) = \lim_{x\to0} -\ln(1+e^{-x}) = -\ln(2)$ et on retombe sur une somme classique...

$$\boxed{S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$$

Solution (**Ex.3 –** *7 points*)

1. a) En prenant $z = 1$, la série entière diverge. donc

$$\boxed{\text{le rayon de convergence R de la série entière } \sum a_n z^n \text{ est au plus égal à 1.}}$$

b) La définition du rayon de convergence R de la série $\sum a_n z^n$ est

$$\boxed{R = \sup\{\rho \in [\,0\,;\,+\infty[\,|(a_n\rho^n) \text{ est une suite bornée}\}}$$

c) La suite $(a_n 1^n)$ étant bornée par hypothèse, $R \geqslant 1$. Avec 1.a),

$$\boxed{R = 1.}$$

2. Posons $a_n = \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

- $\forall n \geqslant 1, \quad a_n \leqslant \sqrt{n}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$ en vertu de l'inégalité de concavité $\ln(1+x) \leqslant x$.
- $\forall n \geqslant 1, \quad a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ or $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc par équivalence de termes positifs et divergence de la série harmonique, $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge. Par comparaisons de termes positifs, $\sum_n a_n$ diverge.
- La suite a vérifie les conditions de la première question donc

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de cette série vaut 1.}}$$

Solution (**Ex.4 –** *10 points*)

1. a) A est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) $\text{rg}(A) = 1$ donc 0 est valeur propre et $\dim E_0(A) = 2$ par la formule du rang. Donc $\mu(0) \geqslant 2$. Le polynôme caractéristique s'écrit donc $\chi_A = X^2(X - \lambda) = X^3 - \lambda X^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais le cours affirme que le coefficient de X^2 est $-\text{Tr}(A)$. Donc $\lambda = \text{Tr}(A) = 3$, $\text{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et les multiplicités sont égales aux dimensions des sous-espaces : A est diagonalisable.

c) $A^2 = 3A$ donc $P = X^2 - 3X = X(X-3)$ est un polynôme scindé à racines simples annulateur de A : A est diagonalisable.

$$\boxed{\text{... donc A est diagonalisable.}}$$

2. Observant $A^3 = AA^2 = 3A^2 = 3^2A$, on montre par récurrence

$$\boxed{\chi_A(X) = X^3 - 3X^2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = 3^{n-1}A.}$$

3. a) Comme $A^2 = 3A \in \mathcal{F}$, on a pour tout x, y, z, t de $\mathbb{K}$,

$$(xI_3 + yA)(zI_3 + tA) = xzI_3 + (xt + yz + 3yt)A \in \mathcal{F} \text{ donc}$$

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

b) Soit λ une valeur propre de A et U un vecteur propre associé. Alors : $MU = (\alpha I_3 + \beta A)U = (\alpha + \beta\lambda)U$ donc U est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\alpha + \beta\lambda$. Comme $\lambda \in \{0, 3\}$,

$$\boxed{\text{Sp}(\alpha I_3 + \beta A) = \{\alpha, \alpha + 3\beta\}.}$$

Solution (**Ex.5 –** *11 points*)

1. Par linéarité de la trace,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de E.}}$$

2. Pour tout M de E, en remarquant que $\mathrm{Tr}(A) = 0$,
$\varphi^2(M) = \varphi(M + \mathrm{Tr}(M)A) = \varphi(M) + \mathrm{Tr}(M)\varphi(A) = M + \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(M)A + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)A$
$\varphi^2(M) = 2(M + \mathrm{Tr}(M)A) - M = 2\varphi(M) - id_E(M)$ donc
$$\boxed{\varphi^2 = 2\varphi - id_E \text{ et P est annulateur de } \varphi}$$
3. $P = (X-1)^2$ étant annulateur de φ, la seule valeur propre possible de φ est 1.
Pour toute matrice M de E, puisque $A \neq 0$, $\varphi(M) = M \Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \Longleftrightarrow M \in \ker(\mathrm{Tr})$
donc 1 est effectivement valeur propre mais $E_1(\varphi) \neq E$ donc
$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$
4. D'après ce qui précède,
$\chi_M = (X-1)^{n^2} = X^{n^2} - \binom{n^2}{1}X^{n^2-1} + \cdots + \binom{n^2}{0}(-1)^{n^2} = X^{n^2} - n^2X^{n^2-1} + \cdots + (-1)^{n^2}$ par la formule du binôme. Donc par unicité des coefficients d'un polynôme
$$\boxed{\mathrm{Tr}(\varphi) = n^2 \text{ et } \det(\varphi) = 1.}$$
On peut aussi raisonner en trigonalisant puisque χ_φ est scindé.
5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   a) • Il existe Q_k et R_k deux polynômes tels que
$$\boxed{(\mathcal{E}) \qquad X^k = Q_kP + R_k \text{ avec } \deg(R_k) < \deg(P).}$$
   • Comme $\deg(P) = 2$, nous pouvons écrire $R_k = a_kX + b_k$.
   $(\mathcal{E})$ évaluée en $X = 1$ donne $1 = a_k + b_k$.
   En dérivant $(\mathcal{E})$, $kX^{k-1} = Q_k'P + Q_kP' + a_k$, qui évaluée en $X = 1$, donne, puisque 1 est racine double de P donc racine de P′, $k = a_k$.
$$\boxed{R_k = kX + 1 - k.}$$
   b) La relation $(\mathcal{E})$ pour $X = \varphi$ donne alors
$$\boxed{\varphi^k = k\varphi + (1-k)id_E.}$$

Solution (**Ex.6 –** *27 points*)

1. Voir le cours
2. En notant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, F_n l'événement « *Face* apparaît au rang n »,
$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\overline{F_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap F_n\right) = p.p.q = p^2q$ par indépendance.
$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 3,\ \mathbb{P}(A_n) = p^2q.}$$
3. **a)** Les événements $\left(A_{3k}\right)$ se référant à des tirages distincts sont mutuellement indépendants, donc $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_k^n \overline{A_{3k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_{3k})) = \left(1 - p^2q\right)^n$
$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \left(1 - p^2q\right)^n.}$$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1}\overline{A_{3k}} = \left[\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_{3k}}\right] \cap A_{3n+3} = B_n \cap A_{3n+3} \subset B_n$ donc
$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$
   c) $\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_{3k}} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0$ par continuité décroissante et puisque $1 - p^2q \in]0\,;\,1[$.
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_{3k}}\right) = 0.}$$
   d) Comme $J \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_{3k}}$ (si le motif n'apparaît jamais, il n'apparaît à aucun rang du type $3k$), $\mathbb{P}(J) \leqslant 0$ par croissance de $\mathbb{P}$ donc

$\boxed{\text{la probabilité de l'événement J est nulle.}}$

4. a) Pour $n \geqslant 3$, on a : $C_{n+1} = C_n \bigcup \left(\overline{C_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right)$, car soit la séquence *Pile-Pile-Face* est apparue pour la première fois à un rang inférieur ou égal à n, soit elle est apparue au rang $n+1$ pour la première fois (donc sans apparaître au cours des $n-2$ premiers rangs).

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad C_{n+1} = C_n \bigcup \left(\overline{C_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right).}$$

b) Par incompatibilité, $\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\overline{C_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right)$.
Puis par indépendance mutuelle,
$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}\left(\overline{C_{n-2}}\right)\mathbb{P}(\overline{F_{n-1}})\mathbb{P}(\overline{F_n})\mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) + p^2 q\left(1 - \mathbb{P}(C_{n-2})\right)$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) + p^2 q\left(1 - \mathbb{P}(C_{n-2})\right).}$$

c)
- Cette relation montre que la suite numérique $\left(\mathbb{P}(C_n)\right)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
- Étant majorée par 1, elle converge, vers une limite $\ell \in [0\,;\,1]$.
- En passant à la limite dans la relation précédente : $\ell = \ell + p^2 q(1-\ell)$ donc $\ell = 1$.

$$\boxed{(\mathbb{P}(C_n))_n \text{ converge, sa limite vaut } 1.}$$

d) On a : $J = \overline{\underset{n\geq 3}{\cup} C_n}$ donc $\mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}\left(\underset{n\geq 3}{\cup} C_n\right)$. Or la suite $(C_n)_{n\geq 3}$ est croissante. Donc par continuité croissante, $\mathbb{P}\left(\underset{n\geq 3}{\cup} C_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1$. On retrouve bien que

$\boxed{\text{la probabilité de l'événement J est nulle.}}$

Moralité : on est (deux fois ;-)) presque-sûr que la succession *Pile-Pile-Face* apparaît au moins une fois.

5. *Je note pour tout i de* $\mathbb{N}^*$, $\quad P_i = \overline{F_i}$.

a)
- Supposons F_1. Alors G ne se réalise jamais car dès que deux *Piles* successifs arrivent, *Face-Pile-Pile* est réalisé tandis que *Pile-Pile-Face* ne l'est pas encore. Donc $\mathbb{P}(G|F_1) = 0$
- Supposons $\overline{F_1} \cap F_2$. Pour les mêmes raisons, $\mathbb{P}\left(G \middle| \overline{F_1} \cap F_2\right) = 0$.
- Supposons $\overline{F_1} \cap \overline{F_2}$. Alors *Pile-Pile-Face* se réalisera dès qu'un *Pile* arrivera, et ceci sans que *Face-Pile-Pile* ne soit apparu. Donc $\mathbb{P}\left(G \middle| \overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = 1$.

$$\boxed{\mathbb{P}(G|F_1) = 0, \quad \mathbb{P}\left(G \middle| \overline{F_1} \cap F_2\right) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(G \middle| \overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = 1.}$$

b) $\left(F_1, \overline{F_1} \cap F_2, \overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right.$ étant un système complet d'événements de probabilité respective q, pq et p^2, la formule des probabilités totales donne $P(G) = q^2 \times 0 + pq \times 0 + p^2/times1 = p^2$

$$P(G) = p^2.$$

c) $p_B = \mathbb{P}(G) = p^2$.
Puisqu'on est sûr que chacun des motifs apparaîtra, l'événement G_M : « M. M gagne » est le contraire de G.

$$\boxed{p_B = p^2 \text{ et } p_M = 1 - p^2.}$$

d) Avec $p = q = \dfrac{1}{2}$, $p_B = \dfrac{1}{4}$ et $p_M = \dfrac{3}{4} = 3p_B$, donc

$\boxed{\text{M. M a trois fois plus de chances de se faire payer un café, bien ouéj !}}$

e) $p^2 > 1/2 \Longleftrightarrow p > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}71$:

$\boxed{\text{Pour que M. B ait plus de chance de gagner que M. M, il faut que la pièce soit fortement truquée.}}$

FIN