Exercice 1 *Étude d'une fonction définie par une intégrale à paramètre*

On pose pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$.

1. **Définition -** Justifier que f est définie sur$[0\,;\,+\infty[$.
2. **Continuité -** Justifier que f est continue sur$[0\,;\,+\infty[$.
3. **Variation sans dérivation -** Montrer que f est décroissante strictement.
4. **Dérivabilité -** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et retrouver ses variations.
5. **Limite -** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 2 *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*

1. Justifier que $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et calculer f''.
4. En déduire f sur $]0\,;\,+\infty[$, puis $f(0)$.
5. En déduire la valeur de l'*intégrale de Dirichlet* : $\mathrm{D} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Solution (**Ex.2** – *Un calcul de l'intégrale de Dirichlet*)

1. Soit $g : [0\,;\,+\infty[\times\,]0\,;\,+\infty[\,\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et $h :]0\,;\,+\infty[\,\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.
   - Pour $x \in [0\,;\,+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\,+\infty[$.
   - Pour $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
   - $\forall (x,t) \in [0\,;\,+\infty[\times\,]0\,;\,+\infty[,\quad |g(x,t)| \leq h(t)$,

   où h est continue par morceaux sur $]0\,;\,+\infty[$, avec

   (i) $\displaystyle\lim_{t\to0} h(t) = \frac{1}{2}$ car $1-\cos t \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$ converge (faussement impropre),

   (ii) $\forall t \geq 1, 0 \leq h(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ converge,

   donc h est continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Ainsi, f est définie et continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. On l'a corrigée en TD grâce au théorème de convergence dominée. Voici une autre proposition.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$, il existe T tel que $\forall t \geq \mathrm{T},\quad h(t) \leq 1$.
   Comme h est continue sur $]0\,;\,\mathrm{T}]$ et est prolongeable en une fonction continue sur $[0\,;\,\mathrm{T}]$, h est majorée sur $[0\,;\,\mathrm{T}]$.
   Donc h est majorée sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]0\,;\,+\infty[, 0 \leq h(t) \leq \mathrm{M}$.
   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, \forall t \in]0\,;\,+\infty[,\quad 0 \leq g(x,t) \leq \mathrm{M}\mathrm{e}^{-xt}$.
   Par croissance de l'intégrale, $\forall x \in [0\,;\,+\infty[, 0 \leq f(x) \leq \dfrac{\mathrm{M}}{x}$.
   Par encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
3. Pour $t \in]0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Regardons les dérivées par rapport à x de g :
   - $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| = \dfrac{1-\cos t}{t}\mathrm{e}^{-xt} \overset{\text{déf.}}{=} h_1(t)$

   h_1 est prolongeable par continuité en 0 (limite nulle) et négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$ donc continue et intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$.
   - $\forall x \in]0\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leq 2\mathrm{e}^{-xt}$

   Plaçons-nous sur $[a\,;\,+\infty[\,\subset\,]0\,;\,+\infty[$ afin de majorer par une quantité indépendante de x.
   $\forall x \in [a\,;\,+\infty[,\quad \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt} \leq 2\mathrm{e}^{-at}$
   et $h_2 : t \mapsto 2\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable d'après le cours car $a > 0$.
   Par le théorème de dérivation, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout $[a\,;\,+\infty[\,\subset\,]0\,;\,+\infty[$.
   Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et f'' se calcule par dérivation sous l'intégrale.
   Soit $x \in]0\,;\,+\infty[$.
   $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \cos t\,\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \mathcal{R}e\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+i)t}\mathrm{d}t\right)$
   $f''(x) = \dfrac{1}{x} - \mathcal{R}e\left(\dfrac{1}{x-i}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$
4. Pour $x \in]0\,;\,+\infty[$,
   $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + k = \ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + k \xrightarrow[x\to+\infty]{} k$.
   Or on démontre comme en 2. que f' est tend vers 0 en $+\infty$. Donc $k = 0$ et $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
   En primitivant à nouveau grâce à des intégrations par parties,
   $f(x) = x\ln x - x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \mathrm{Arctan}(x) + \kappa$
   $f(x) = x\ln x - \dfrac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \kappa$

Déterminons κ grâce à la limite en $+\infty$:
$\ln(x^2+1) = \ln(x^2) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + 1/x^2 + o\left(1/x^2\right)$
D'où : $f(x) = -\dfrac{1}{2x} + o\left(1/x\right) - \operatorname{Arctan}(x) + \kappa \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\dfrac{\pi}{2} + \kappa$
Or d'après 2., $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $\kappa = \dfrac{\pi}{2}$.
Finalement : $f(x) = x\ln x - \dfrac{x}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}$.
Comme f est continue en 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, donc
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ *Explicitation grâce à une équation différentielle*

Soit, pour $x\in\mathbb{R}$ et sous réserve de définition, $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. On admet que l'intégrale de Gauβ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ vaut $\sqrt{\pi}$. Déterminer une expression explicite (i.e. sans intégrale) de f.

Solution (**Ex.3** – *Explicitation grâce à une équation différentielle*)

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
Soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}, t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$. φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par parité et car $\varphi(t) = o(\mathrm{e}^{-t})$ en $+\infty$ et $t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

① Pour $t\in\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

② Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue et dominée par φ.

③ Pour $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

④ $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2, \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |t|\,\varphi(t)$ or $t\mapsto |t|\,\varphi(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car continue, paire et vérifiant $|t|\,\varphi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t$.

En observant que $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t^2}}{\mathrm{d}t} = -2t\mathrm{e}^{-t^2}$, une intégration par parties s'impose.
$u : t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $v : t\mapsto \sin(xt)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ car $|u(t)v(t)| \leq u(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$.
Alors : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = -\dfrac{x}{2}f(x)$. f est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

3. Les solutions de cette équation homogène sont les fonction $x\mapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-x^2/4}$ avec $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ arbitraire.
L'énoncé donne la condition initiale $f(0) = \sqrt{\pi}$. Donc : $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ *Recherche d'un équivalent et d'une limite*

On considère la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante.
3. Montrer grâce au théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to+\infty} xf(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
5. Justifier que $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2}}{x+t}\mathrm{d}t$ et en déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solution (**Ex.4** – *Recherche d'un équivalent et d'une limite*)

On considère la fonction $f : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Soit $g :]\,0\,;\,+\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x,t)\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$.
L'énoncé peut laisser penser qu'on va rencontrer une difficulté en 0. Soit $a > 0$. Plaçons-nous sur $[\,a\,;\,+\infty[$.

① Pour $t\in\,]\,0\,;\,+\infty[$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $[\,a\,;\,+\infty[$.

② Pour $x\in[\,a\,;\,+\infty[$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

③ $\forall (x,t)\in[\,a\,;\,+\infty[\,\times\,]\,0\,;\,+\infty[,\quad |g(x,t)| \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{a}$ or $t\mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

Par le théorème de continuité, f est définie et continue sur $[\,a\,;\,+\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, f est définie et continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

2. Soit $h :]\,0\,;\,+\infty[^2 \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$.

Appliquons le théorème de convergence dominée.

① Pour tout $t \in]\,0\,;\,+\infty[$, $h(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-2t}$.

② $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

③ $\forall (x,t) \in]\,0\,;\,+\infty[\times]\,0\,;\,+\infty[$, $|h(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-2t}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}$ est une fonction intégrable de référence sur $]\,0\,;\,+\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} xf(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

3. Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Exercice 5 *Calcul d'une intégrale à deux paramètres*

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Montrer que $\mathrm{I}(\alpha,\beta) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t$ existe.

2. Dans cette question, on se propose de calculer $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ à l'aide d'une fonction définie par une intégrale.

On pose, pour tout $x \in [\,1\,;\,+\infty[$, $f(x) = \mathrm{I}(1,x)$.

a) Montrer que f est dérivable sur $[\,1\,;\,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $[\,1\,;\,+\infty[$.

b) En déduire une expression explicite de f, puis de $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$.

Solution (**Ex.5** – *Calcul d'une intégrale à deux paramètres*)

1. Soit $0 < \alpha \leq \beta$.

- $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$.
- Au voisinage de 0, $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} = \dfrac{1 - \alpha t + o(t) - 1 + \beta t - o(t)}{t} = \beta - \alpha + o(1) \xrightarrow[t\to0]{} \beta - \alpha$ donc $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ est faussement impropre donc convergente en 0.
- $t^2\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t} = o\left(1/t^2\right)$ donc $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$ converge en $+\infty$ par domination.

Donc pour $0 < \alpha \leq \beta$, $\mathrm{I}(\alpha,\beta) \overset{\text{déf.}}{=} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t$ existe.

2. On pose, pour tout $x \in [\,1\,;\,+\infty[$, $f(x) = \mathrm{I}(1,x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\mathrm{d}t$.

a) Soit $g : [\,1\,;\,+\infty[\times]\,0\,;\,+\infty[\,, (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}$.

C'est parti pour la dérivation $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale...

① Pour $t \in]\,0\,;\,+\infty[$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,1\,;\,+\infty[$.

② Pour $x \in [\,1\,;\,+\infty[$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue intégrable sur $]\,0\,;\,+\infty[$ par la première question (c'est $\mathrm{I}(x,1)$).

③ Pour $x \in [\,1\,;\,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}g(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}$ est continue (et même déjà intégrable).

④ $\forall (x,t) \in [\,1\,;\,+\infty[\times]\,0\,;\,+\infty[\,$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}g(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t}$ avec $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ intégrable.

Par le théorème de dérivation, f est dérivable sur $[\,1\,;\,+\infty[$ et : $\forall x \in [\,1\,;\,+\infty[$, $\quad f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$.

b) En primitivant, et en observant que $f(1) = 0$, on a : $\forall x \in [\,1\,;\,+\infty[\,, f(x) = \ln(x)$.

Soit $0 < \alpha \leq \beta$. Posons $u = \alpha t$, changement $\mathcal{C}^1$ strictement monotone dans $\mathrm{I}(\alpha,\beta)$.

$\mathrm{I}(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\mathrm{d}t \overset{u=\alpha t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-\beta u/\alpha}}{u}\mathrm{d}u = f(\beta/\alpha) = \ln\frac{\beta}{\alpha} = \ln\beta - \ln\alpha$.

Exercice 6 *Étude d'une fonction*

Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie, paire et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. À l'aide du changement de variable $u = xt$ et dé l'intégrale de Dirichlet de l'exercice 2, déterminer un équivalent de f en $\pm\infty$.

Solution (**Ex.6** – *Étude d'une fonction*)

1. $g(x,t) = \dfrac{1 - \cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times]\,0\,;\,+\infty[$.

Commençons par remarquer que, si $f(x)$ existe, alors $f(-x)$ existe et vaut $f(x)$: f est paire sur son domaine de définition qui est forcément symétrique par rapport à 0.

- À t fixé, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- À x fixé, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]\,0\,;\,+\infty[$, et intégrable car prolongeable par continuité en 0 ($g(x,t) \underset{t\to0}{\sim} x^2$) - d'où intégrale faussement impropre en 0 -, et $g(x,t) = o\left(1/t^2\right)$ en $+\infty$.

- À x fixé, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t} \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$.
- Grâce à la majoration usuelle : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$, on a :

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]\,0\,;\ +\infty[\,, \left| \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t) \right| \leq |x|\,\mathrm{e}^{-t}$.

Plaçons nous sur $[\,-a\,;\ a]$ avec $a > 0$ quelconque. Alors :

$\forall (x,t) \in [\,-a\,;\ a] \times]\,0\,;\ +\infty[\,, \left| \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t) \right| \leq a\mathrm{e}^{-t}$.

Or $t \mapsto a\mathrm{e}^{-t}$ est continue et intégrable qur $]\,0\,;\ +\infty[$. Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[\,-a\,;\ a]$, ceci pour tout $a > 0$.
Donc f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Le changement $u = xt$ est $\mathcal{C}^1$ bijectif tant que $x \neq 0$.

$\forall x \in]\,0\,;\ +\infty[\,, f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t \overset{u=xt}{=} x \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2} \mathrm{e}^{-u/x} \mathrm{d}u$

On va utiliser le théorème de convergence dominée pour $x \in [\,1\,;\ +\infty[$.

Soit, $h : (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} \mathrm{e}^{-u/x}$. On a :

- pour tout x, $t \mapsto h(x,t)$ continue sur $]\,0\,;\ +\infty[$,
- $h(x,t) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell(u) = \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$,
- De l'inégalité classique : $\forall u \in \mathbb{R}, |1 - \cos u| \leq u^2$, on tire :

$\forall x \in [\,1\,;\ +\infty[\,, \forall u \in]\,0\,;\ +\infty[\,, |h(x,u)| \leq \mathrm{e}^{-u}$ (car $x \geqslant 1$)
avec $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ continue et intégrable sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} h(x,u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \ell(u)\mathrm{d}u$,

i.e. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Autrement dit : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2} x$. Et par parité, $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} -\dfrac{\pi}{2} x$.

Exercice 7 *Une famille d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]\,0\,;\ +\infty[$, soit $\mathrm{I}_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Montrer que I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3}$.

Solution (**Ex.7** – *Une famille d'intégrales*)

1. Soit deux réels a et A tels que $< a <$ A.

Soit $f_n : [\,a\,;\ \mathrm{A}] \times [\,0\,;\ +\infty[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n}$.

- Pour $t \in [\,0\,;\ +\infty[$, $x \mapsto f_n(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\ \mathrm{A}]$.
- Pour $x \in [\,a\,;\ \mathrm{A}]$, $t \mapsto f_n(x,t)$ est continue et intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$ car $f_n(x,t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ où $2n > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable et ces deux fonctions sont positives.
- Pour $x \in [\,a\,;\ \mathrm{A}]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2nx}{(t^2+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[\,0\,;\ +\infty[$.
- $\forall (x,t) \in [\,a\,;\ \mathrm{A}] \times [\,0\,;\ +\infty[$, $\left| \dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) \right| \leq \dfrac{2n\mathrm{A}}{(t^2+a^2)^{n+1}}$,

or $\varphi : t \mapsto \dfrac{2n\mathrm{A}}{(t^2+a^2)^{n+1}} = 2n\mathrm{A} f_{n+1}(a,t)$ est continue et intégrable sur $[\,0\,;\ +\infty[$ d'après le second point.
Donc I_n est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\ \mathrm{A}]$, et ceci pour tout $[\,a\,;\ \mathrm{A}] \subset]\,0\,;\ +\infty[$, donc I_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\,0\,;\ +\infty[$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]\,0\,;\ +\infty[\,, \mathrm{I}_n'(x) = -2nx\mathrm{I}_{n+1}(x)$.

Pour $x > 0$, $\mathrm{I}_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \left[\frac{1}{x} \mathrm{Arctan}\left(\frac{t}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}$.

Puis $\mathrm{I}_2(x) = -\dfrac{1}{2x} \mathrm{I}_1'(x) = \dfrac{\pi}{4x^3}$, puis $\mathrm{I}_3(x) = -\dfrac{1}{4x} \mathrm{I}_2'(x) = \dfrac{3\pi}{16x^5}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^3} = \mathrm{I}_3(1) = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice 8 *Étude d'une fonction*

Soit, sous réserve d'existence, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $]\,-1\,;\ +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,-1\,;\ +\infty[$.

3. Montrer que $h :]\,0\,;\ 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

4. En déduire $f(x)$ pour tout $x > -1$.

Solution (**Ex.8** – *Étude d'une fonction*)

1. Soit $g :]\,-1\,;\ +\infty[\times]\,0\,;\ 1[\to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t} t^x$.

Soit $x \in]\,-1\,;\ +\infty[$. $t \mapsto g(x,t)$ est continue et positive sur $]\,0\,;\ 1[$.
De plus, $g(x,t) \underset{t \to 1}{\sim} 1$ donc l'intégrale définissant $f(x)$ est faussment impropre donc convergente en 1.

Enfin, $g(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t^x}{\ln t}$ donc $g(x,t) = o\left(t^x\right)$ en 0, donc $g(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^{-x}}\right)$, or $-x < 1$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]\,0\,;\ 1/2]$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]\,0\,;\ 1/2]$.
Ceci assure l'existence de $f(x)$.

2. • Pour $t \in]\,0\,;\ 1[$, $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;\ +\infty[$.
• Pour $x > -1$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur $]\,0\,;\ 1[$ (d'après 1)).
• Pour $x > -1$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x = t^{x+1} - t^x$ est continue.
• $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t}\right.$ n'étant pas intégrable sur $]\,0\,;\ 1[$, on va devoir éviter -1 !!!$\left.\right]$
Soit a tel que $-1 < a < 0$.
$\forall (x,t) \in [\,a\,;\ +\infty[\times]\,0\,;\ 1[\,,\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = (1-t)t^x \leq t^x \leq t^a$
(car $t \in]\,0\,;\ 1[\Longrightarrow \ln(t) < 0 \Longrightarrow a\ln(t) \geq x\ln(t) \Longrightarrow t^a \geq t^x$)
or $\varphi : t \mapsto t^a = \dfrac{1}{t^{-a}}$ est intégrable sur $]\,0\,;\ 1[$ (car $a > -1$ donc $-a < 1$).
Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\,a\,;\ +\infty[$, et ceci pour tout $a \in]-1\,;\ 0[$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;\ +\infty[$.

3. h est continue sur $]\,0\,;\ 1[$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus : $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $h(t) \xrightarrow[t\to 1]{} 1$, donc h est prolongeable en fonction continue sur le *segment* $[\,0\,;\ 1]$, donc h est bornée sur $]\,0\,;\ 1[$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]\,0\,;\ 1[\,, |h(t)| \leq \mathrm{M}$.
Alors : $\forall x > -1, \forall t \in]\,0\,;\ 1[\,, |f(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 h(t)t^x \mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_0^1 |\mathrm{M}t^x|\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{\mathrm{M}}{x+1}$.
Par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. On a par dérivation sous l'intégrable :
$\forall x > -1, f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x+1} - t^x \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$.
Donc : $\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}, \forall x > -1, f(x) = \ln\dfrac{x+2}{x+1} + \mathrm{K}$
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+2}{x+1} = 0$ donc $\mathrm{K} = 0$.
Ainsi : $\forall x > -1, f(x) = \ln\dfrac{x+2}{x+1}$.