

Exercice 1 *Isométries diagonalisables*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{O}(E)$.

On suppose f diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale.

Solution (Ex.1 – Isométries diagonalisables)

f est une isométrie donc ses seules valeurs propres réelles possibles sont -1 et 1 :

$\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Trois cas sont possibles :

- $\text{Sp}(f) = \{1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = 1 \times \text{id}_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1\}$, et comme f est diagonalisable, $f = -1 \times \text{id}_E$;
- $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, et comme f est diagonalisable, dans une base propre $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \text{ (avec } p = \dim(\text{SEP}(f, -1)) \text{ et } q = \dim(\text{SEP}(f, 1))).$$

Dans les trois cas, $f^2 = \text{id}_E$.

Donc f est une symétrie, toujours d'axe E_1 et de direction E_{-1} .

Soit $u \in E_1$ et $v \in E_{-1}$.

f est orthogonale donc conserve le produit scalaire, donc $\langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$, donc $\langle u, v \rangle = 0$ et $u \perp v$.

Ceci prouve que $E_1 \perp E_{-1}$ donc que f est une symétrie orthogonale.

Exercice 2 *Complémentaire d'une isométrie*

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E .

On pose $g = \text{id}_E - f$.

Montrer que $\text{Ker}(g) = (\text{Im}(g))^{\perp}$.

Solution (Ex.2 – Complémentaire d'une isométrie)

Soit $x \in \text{Ker}(g)$ et $y \in \text{Im}(g)$.

$x \in \text{Ker}(g)$ donc $x = f(x)$.

Soit $z \in E$ tel que $y = g(z) = z - f(z)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, z - f(z) \rangle = \langle x, z \rangle - \langle f(x), f(z) \rangle$ car $x = f(x)$,

$\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x, z \rangle$ car f conserve le produit scalaire.

$\langle x, y \rangle = 0$.

Ainsi : $\text{Ker}(g) \perp \text{Im}(g)$.

Mais par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$.

Donc $\text{Ker}(g)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(g)$.

Exercice 3 *Étude d'une isométrie*

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B}$ sa base canonique.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie.
2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + z = 0$ est stable par f .
3. $\mathcal{P}^{\perp}$ est-il stable par f ?
4. Déterminer la matrice de f relativement à une base orthonormale adaptée à la décomposition $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = E$.

Solution (Ex.3 – Étude d'une isométrie)

1. Les colonnes de M forment une famille orthonormale. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E , f est une isométrie de E .
2. $\mathcal{P} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, 0)) = \text{Vect}(u, v)$.

Or $f(u) = \sqrt{2}v \in \mathcal{P}$ et $f(v) = -\frac{\sqrt{2}}{2}u \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{P}$ est stable par f .

3. f est une isométrie et $\mathcal{P}$ est stable par f donc $\mathcal{P}^{\perp}$ est stable par f .
4. $\mathcal{P}^{\perp} = \text{Vect}((1, 0, 1)) = \text{Vect}(w)$.

Prenons $\mathcal{C} = (\frac{1}{\sqrt{2}}u, v, \frac{1}{\sqrt{2}}w)$, base orthonormale adaptée à $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = E$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 4 *Équation matricielle (CCP 2019)*

1. Montrer que $(A \mid B) = \text{Tr}(A^T B)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3. En déduire que, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(M^T M = M^2) \iff (M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que, pour tout $n \geq 3$, il existe M non symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^T M = M^2$. On pourra chercher M sous la forme VU^T avec U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
5. Montrer que toutes les solutions de $M^T M = M^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont symétriques.



2. En prenant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $H = \{X \in E, \langle X, U \rangle = 0\} = \text{Vect}(U)^\perp$ donc comme
- $$s_H = 2p_H - id = 2(id - p_\Delta) - id = id - 2p_\Delta, \text{ et } UU^T = (1)_{i,j} \text{ et } \|U\|^2 = n,$$
- $$\mathcal{M}_C(p_H) = I_n - 2\frac{1}{n}UU^T = (m_{i,j}) \text{ où}$$
- $$m_{i,i} = 1 - \frac{2}{n} \text{ et si } i \neq j, m_{i,j} = -\frac{2}{n}.$$

Exercice 6 Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et n un entier naturel au moins égal à 2.

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère

$$\varphi : E \rightarrow E, M \mapsto aM + bM^T.$$

- Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
- a) Rappeler la définition du produit scalaire canonique de E .
b) Justifier que φ est diagonalisable.
- a) Déterminer les éléments propres de φ .
b) Préciser $\det(\varphi)$ et $\text{Tr}(\varphi)$.
- a) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une projection orthogonale ?
b) À quelle condition nécessaire et suffisante φ est-elle une symétrie orthogonale ?

Solution (Ex.6 – Un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

- Découle de la linéarité de la transposition.
- Avec le produit scalaire canonique $(A | B) = \text{Tr}(A^T B)$, on a pour tout $(A, B) \in E$,

$$(\varphi(A) | B) = \text{Tr}((aA + bA^T)^T B) = a\text{Tr}(A^T B) + b\text{Tr}(AB) \text{ et}$$

$$(A | \varphi(B)) = \text{Tr}(A(aB + bB^T)^T) = a\text{Tr}(AB^T) + b\text{Tr}(AB) \text{ et comme}$$

$$\text{Tr}(AB^T) = \text{Tr}((AB^T)^T) = \text{Tr}(BA^T) = \text{Tr}(A^T B), \text{ on a}$$

$$(\varphi(A) | B) = (A | \varphi(B)).$$

Donc φ est autoadjoint donc diagonalisable.
- a) Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(S) = (a+b)S$, donc $a+b$ est une valeur propre de φ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a+b}(\varphi)$.
 Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $\varphi(A) = (a-b)A$, donc $a-b$ est une valeur propre de φ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a-b}(\varphi)$.

Notons que $b \neq 0$ donc $a+b \neq a-b$.

Comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, on a $\mu(a+b) + \mu(a-b) \geq n^2$ et comme $n^2 = \dim(E)$, $\mu(a+b) + \mu(a-b) \leq n^2$.

Donc il n'y a pas d'autre valeur propre et

$$\text{Sp}(\varphi) = \{a+b, a-b\}, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_{a+b}(\varphi) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{a-b}(\varphi).$$

- b) $\det(\varphi) = (a+b)^{\mu(a+b)}(a-b)^{\mu(a-b)} = (a+b)^{n(n+1)/2}(a-b)^{n(n-1)/2}$,
 $\text{Tr}(\varphi) = (a+b)\mu(a+b) + (a-b)\mu(a-b) = n^2a + nb$.

4. Dans une base adaptée à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice représentant φ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} (a+b)I_p & 0 \\ 0 & (a-b)I_q \end{pmatrix}$.

- a) Comme φ est autoadjoint, il suffit que ce soit un projecteur pour être un projecteur orthogonal.

On a $\varphi^2 = \varphi$ si, et seulement si, $(a+b)^2 = a+b$ et $(a-b)^2 = a-b$ donc si, et seulement si, $(a+b=0, a-b=1)$ ou $(a+b=1, a-b=0)$ donc si, et seulement si, $(a, b) = (1/2, -1/2)$ ou $(a, b) = (1/2, 1/2)$, ou encore $a = 1/2$ et $b = \pm 1/2$.

- b) De la même façon,

On a $\varphi^2 = id$ si, et seulement si, $(a+b)^2 = 1$ et $(a-b)^2 = 1$ donc si, et seulement si, $(a+b=1, a-b=-1)$ ou $(a+b=-1, a-b=1)$ donc si, et seulement si, $(a, b) = (0, 1)$ ou $(a, b) = (0, -1)$, ou encore $a = 0$ et $b = \pm 1$.

Exercice 7 Diagonalisation orthogonale des matrices J_n

Soit $n \geq 2$, $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

- Justifier que J_n est diagonalisable, et possède exactement deux sous-espaces propres supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre.
- En déduire l'existence d'une matrice $P_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$J_n = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^T.$$

- Expliciter une matrice P_2 convenable.
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commute avec J_2 , alors il existe $(a, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T$$

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_n = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Que vaut $P_n^T M_n P_n$?

Solution (Ex.7 – Diagonalisation orthogonale des matrices J_n)

1. $\text{rg}(J_n) = n - 1$ donc $0 \in \text{Sp}(J_n)$ et $\dim E_0 = n - 1$.
De plus : $E_0 = \text{Vect}(E_1 - E_2, E_1 - E_3, \dots, E_1 - E_n)$.
 J_n possède au plus une autre valeur propre, dont le sous-espace propre associé sera de dimension 1.
En notant $U_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la colonne ne contenant que des « 1 », $J_n U_n = n U_n$ donc $n \in \text{Sp}(J_n)$ et $E_n = \text{Vect}(U_n)$.
Donc J_n est diagonalisable et $E_0 \oplus E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Comme : $\forall j \in \llbracket 2; n \rrbracket, \langle E_1 - E_j, U_n \rangle = 0$, on a $E_0 \perp E_n$.
2. Soit $(C_1, \dots, C_{n-1})$ une base orthonormale de E_0 (obtenue par exemple par le procédé de Gram-Schmidt) et $C_n = \frac{1}{\sqrt{n}} U_n$.
Alors la matrice de passage P_n de la base canonique orthonormale à la base $(C_1, \dots, C_n)$ elle aussi orthonormale est une matrice orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de J_n , d'où
 $J_n = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^{-1} = P_n \times \text{diag}(0, \dots, 0, n) \times P_n^T$.
3. Pour $n = 2$, $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ convient.
4. Notons $J = J_2$, $P = P_2$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de sorte que $J = PDP^{-1}$, et notons

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En multipliant par P^{-1} et P :

$$AJ = JA \iff BD = DB \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} \iff b = c = 0.$$

$$\text{Donc } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \text{ i.e. } A = P_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P_2^T.$$

Exercice 8 Comment fabriquer des produits scalaires ?

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de E .

1. Montrer que, si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la forme

$$\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (X, Y) \longmapsto X^T S Y$$

est un produit scalaire.

2. Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E de norme euclidienne associée $\|\cdot\|$, et $S = ((E_i | E_j))_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Soit X et Y dans E . Exprimer $(X | Y)$ à l'aide de S .
c) Que vaut S lorsque $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire canonique ?
3. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A$.
a) Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) On suppose de plus que A est inversible. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Solution (Ex.8 – Comment fabriquer des produits scalaires ?)

1. Notons que $X^T S X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$, donc puisque S est symétrique $(X^T S X)^T = X^T S X$. Ce qui prouve la symétrie de φ .
La linéarité à droite ne pose pas de problème, et comme S est positive définie, φ est défini positif.

2. a) S est symétrique par symétrie du produit scalaire.

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} X^T S X &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (E_i | E_j) x_i x_j = \sum_{i=1}^n (E_i | \sum_{j=1}^n x_j E_j) = \\ &= (\sum_{i=1}^n x_i E_i | \sum_{j=1}^n x_j E_j) = (X | X) = \|X\|^2 \end{aligned}$$

donc $X^T S X \geq 0$ avec égalité si, et seulement si, $X = 0$, donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

- b) Le calcul précédent en remplaçant le second X par Y donne

$$X^T S Y = \left(\sum_{i=1}^n x_i E_i \mid \sum_{j=1}^n y_j E_j \right) = (X \mid Y)$$

On peut aussi retrouver cette expression en partant de l'identité polaire

$$(X \mid Y) = \frac{1}{2}(\|X + Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2) = \frac{1}{2}((X + Y)^T S (X + Y) - X^T S X - Y^T S Y) = \dots = X^T S Y$$

c) Si $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire canonique, alors $S = I_n$.

3. a) $S^T = (A^T A)^T = A^T A = S$,

$$\forall X \in E, \quad X^T S X = (AX)^T A X = \|AX\|_{\text{canonique}}^2 \geq 0 \text{ donc } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).$$

b) En supposant A inversible :

$$X^T S X = 0 \implies \|AX\|_{\text{canonique}} = 0 \implies AX = 0 \implies A^{-1} A X = 0 \implies X = 0 \text{ donc } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Exercice 9 Matrices de Hilbert

Soit $n \geq 2$ et H_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$[H_n]_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

1. Justifier que H_2 est définie et positive à l'aide de sa trace et de son déterminant.

2. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) En observant que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} dt$, montrer que

$$X^T H_n X = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt.$$

b) En déduire que H_n est définie et positive.

Solution (Ex.9 – Matrices de Hilbert)

1. $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ donc H_2 est diagonalisable, avec pour valeurs

propres λ et μ (éventuellement égales) vérifiant

$$\lambda \mu = \det(H - 2) = 1/12 > 0 \text{ donc } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont non nulles de même signe,}$$

$$\lambda + \mu = \text{Tr}(H_2) = 4/3 > 0 \text{ donc } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont strictement positives.}$$

$$\text{Donc } H_2 \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i t^{i-1} y_j t^{j-1} dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \frac{1}{i+j-1} = X^T H_n X. \end{aligned}$$

3. a) Supposons $X^T H_n X = 0$.

Notons $P : t \mapsto \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$. Par positivité de l'intégrale, comme $P^2 \geq 0$,

$$X^T H_n X \geq 0.$$

Comme P^2 est continue et positive d'intégrale nulle sur $[0; 1]$, P^2 est nulle sur $[0; 1]$. Donc la fonction polynomiale P possède une infinité de racines, donc est nulle, donc a tous ses coefficients nuls. Donc $X = 0$.

Ainsi $H_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 10 Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, nature de l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution (Ex.10 – Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

Symétrie orthogonale d'axe le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.

Exercice 11 Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, On considère l'endomorphisme φ canoniquement associé à

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Justifier que φ est une isométrie. Est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que $\mathcal{P} = (E_1)^\perp$ est stable par φ et donner la nature précise de la restriction de φ à $\mathcal{P}$.

2. Montrer que φ^2 est une symétrie orthogonale et préciser son axe.

Solution (Ex.11 – Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$)

φ est une isométrie, $\text{Sp}(\varphi) = \{1\}$. $E_1 = \text{Vect}(1, 0, 1)$ est stable par φ et φ est une isométrie donc $\mathcal{P} = (E_1)^\perp$ est aussi stable.

$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), (0, 1, 0) \right) = (u, v, w)$ est une base orthonormale directe de E adaptée à la somme $E_1 \oplus \mathcal{P}$, et

$$\mathcal{M}_{(v,w)}(\varphi|_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\varphi|_{\mathcal{P}}$ est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 12 Matrice de projection symétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = {}^t A = A$.

- Justifier que A est diagonalisable avec $\text{rg}(A) = \text{Tr}(A)$.
- Montrer que $\text{rg}(A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$.
- Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}$.

Solution (Ex.12 – Matrice de projection symétrique)

- $A^2 = A$ donc A est une matrice de projecteur, donc diagonalisable et semblable

à $D = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array} \right)$. En particulier, $\text{rg}(A) = \text{Tr}(A)$.

- $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) \stackrel{D^2=D}{=} \text{Tr}(D^2) = \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$.

- En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs :

$x = (|a_{1,1}|, \dots, |a_{n,n}|)$ et $y = (1, \dots, 1)$,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\| \leq \sqrt{n^2} \times \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2} \leq n\sqrt{\text{rg}(A)}.$$