

Exercice 1 *Un calcul de l'intégrale de Gauss...*

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = f(x^2).$$

1. Justifier que f de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f' .
2. Déterminer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que $j : x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Solution (Ex.1 – Un calcul de l'intégrale de Gauss...)

Notons que **tant que nous travaillons sur le SEGMENT $[0; 1]$, toute fonction continue sur ce segment est intégrable.**

1. • Soit $h : \mathbb{R} \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$.
 - À $t \in [0; 1]$ fixé, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - À $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto h(x, t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$, donc intégrable.
 - Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}, x \in [a; b]$ et $t \in [0; 1]$.

Il faut maîtriser les majorations à venir, et c'est simple si on ne joue pas aux devinettes mais si on y va pas à pas.

$$1+t^2 \geq 1 \implies \frac{1}{1+t^2} \leq 1, \text{ et } a \leq x \xRightarrow{(-1 < 0)} -a \geq -x \xRightarrow{(1+t^2 > 0)} -a(1+t^2) \geq -x(1+t^2) \xRightarrow{(\exp \nearrow)} e^{-a(1+t^2)} \leq e^{-x(1+t^2)}$$

donc $|h(x, t)| \leq e^{-a(1+t^2)}$, **et ce dernier majorant n'est pas forcément plus petit que 1 car a peut être strictement négatif.**

$\varphi : t \mapsto e^{-a(1+t^2)}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0; 1]$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt = e^{-x} \int_0^1 e^{-xt^2} dt.$$

2. • $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
 - Soit $x \geq 0$. $\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x}$, donc par croissance de l'intégrale $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour cette dernière limite, en dominant par exemple par la constante 1 intégrable sur le segment $[0; 1]$, **mais il faut alors donner une majoration sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ car il faudra faire tendre x vers $+\infty$.**

3. Soit $j : x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$.

Par composition, j est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$j'(x) = 2xf'(x^2) - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Pour $x = 0$, $j'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, posons $u = xt$ dans la première intégrale, changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donc bijectif (ce qui ne serait pas le cas pour $x = 0$) :

$$j'(x) = 2xe^{-x^2} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-u^2} du - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$$

Donc j est constante sur $\mathbb{R}$.

4. $j(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} g(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$, donc j est constante égale à $\frac{\pi}{4}$.

Or $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}$, et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \geq 0$, justification nécessaire que je n'ai lue dans aucune copie,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2 ... et quelques valeurs de la fonction Gamma d'Euler

On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x) \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ existe si, et seulement si, $x > 0$.
2. a) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
b) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
3. a) Déterminer la valeur exacte de $\Gamma(1/2)$ à l'aide de l'intégrale de Gauss calculée dans l'exercice précédent.
b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ à l'aide de puissances et de factorielles.

Solution (Ex.2 – ... et quelques valeurs de la fonction Gamma d'Euler)

1. Soit $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et positive sur $]0; +\infty[$.
Étude en 0 : $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$. Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si, et seulement si, $x-1 > -1$, i.e. $x > 0$. Donc $\int_0^1 f(x, t) dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.
Étude en $+\infty$: $t^2 f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ car $t^{x+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^t)$, donc $f(x, t) = o(1/t^2)$ et $\int_1^{+\infty} f(x, t) dt$ converge.
Donc $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ existe si, et seulement si, $x > 0$.
2. a) Soit $x \in]0; +\infty[$. $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$. Effectuons une intégration par parties avec : $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t} C^1$ sur $]0; +\infty[$ et vérifiant

$$-t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ et } -t^x e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$
- b) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, et par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

3. a) L'exercice *Un calcul de l'intégrale de Gauss* donne, à l'aide d'un **changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissant donc bijectif**

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \stackrel{u=t^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \text{ donc } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

- b) En itérant la formule de 2.a),

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} \left(n - \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{5}{2}\right) = \dots$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n} \Gamma(1/2) = \frac{(2n)!}{n! 2^{2n}} \sqrt{\pi}$$

avec les manipulations classiques permettant que calculer le produit des entiers impairs :

$$P_n = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n! \text{ donc } I_n = \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{P_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Remarque : cette formule se démontre aussi par récurrence sur n ...

L'hérédité peut se rédiger comme suit :

$$\Gamma(n+1+1/2) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2n+1}{2} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{2n+2}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi}$$